Méthode
Étude de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans tout ce chapitre, on utilisera l'abréviation APCR pour : à partir d'un certain rang.
Une propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie à partir d'un certain rang ssi il existe n_0 tel que : $\forall\, n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie ; une suite (u_n) vérifie une propriété APCR ssi il existe n_0 tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ vérifie cette propriété.
Par exemple, la suite (u_n) donnée par $u_n = n^2 - 12n + 36$ est croissante APCR *(montrez-le !).*

1 Présentation

On a souvent à étudier des suites récurrentes définies par la donnée d'un terme initial (u_0 ou u_1) et d'une relation de récurrence de type $u_{n+1} = f(u_n)$. Hors cas très particulier (suites géométriques par exemple), on ne sait pas donner une forme explicite de type $u_n = f(n)$; on peut néanmoins obtenir beaucoup d'informations sur la suite, notamment grâce à l'étude de la fonction f.

La problématique principale est de déterminer si la suite converge, et, si oui, vers quelle limite.

Toute cette démarche sera la plupart du temps guidée, de manière plus ou moins détaillée, dans une épreuve écrite. Il faudra donc savoir redémontrer tous les résultats mentionnés, et notamment rédiger les récurrences. Il est par contre bon d'avoir une vision globale de l'étude, pour comprendre à quoi servent les différentes questions de l'énoncé et pouvoir les utiliser à bon escient.

Quoiqu'il en soit, la première méthode à retenir est : répondre aux questions de l'énoncé !!

Au cours de ce polycopié on traitera l'exemple suivant :

Soit (v_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n + \ln(2 - v_n) \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier n, v_n est bien défini et appartient à $[0,1]$.
2. Montrer que (v_n) est croissante.
3. En déduire que (v_n) converge, et donner sa limite.

---

2 Définition de la suite

Un premier problème peut se poser : il arrive que la fonction f ne soit pas définie sur $\mathbb{R}$ entier (présence d'un ln, d'une racine carrée, d'un dénominateur pouvant s'annuler...). Il convient donc de s'assurer qu'aucun des termes u_n ne sorte de l'ensemble de définition de f. Dans le cas contraire, u_{n+1} ne peut être défini, et la suite s'arrête là.

Exemple 1. Calculer les premiers termes de la suite (v_n) définie par $v_0 = e$, et : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \ln(v_n)$.

Généralement on obtient l'existence de la suite en *localisant les termes* ; c'est-à-dire montrant par récurrence que tous les u_n sont dans un même intervalle (résultats de type : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$ par exemple). Une démonstration de ce type utilise en fait, de manière plus ou moins implicite, la notion[1] d'*intervalle stable* :

Définition 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle* I. *On dit que* I *est stable par f ssi :* $\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \in \mathrm{I}$.

Si u_0 appartient à I stable par f, alors par récurrence sur n on montre que tous les u_n appartiennent à I, et donc que la suite est bien définie. Le fait de localiser ainsi les termes de (u_n) servira aussi à obtenir des majorations et/ou minorations qui seront utiles pour discuter de la convergence de la suite.

Exercice 1. Soit (v_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n + \ln(2 - v_n) \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier n, v_n est bien défini et appartient à $[0,1]$.

Exemple 2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Montrer par récurrence que u_n est bien défini, et que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.

[1] Pas vraiment au programme ; vocabulaire non exigible en tout cas.

3 Monotonie

Le théorème le plus utilisé dans ce genre d'exercices pour conclure à la convergence est : toute suite croissante et majorée (ou : décroissante et minorée) converge. Une des problématiques essentielles est donc la *monotonie* de la suite (u_n).

Remarque 1. Se souvenir néanmoins qu'il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes ; ce critère ne peut donc pas s'appliquer en toutes circonstances.

Il existe plusieurs méthodes. On suppose que tous les termes u_n sont dans un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$, sur lequel f est définie.

3.1 Calcul direct

Cette méthode est la plus simple, donc à tenter en priorité.
On cherche à utiliser les critères usuels de monotonie :

- étude du signe de $u_{n+1} - u_n$;
- **Si** (u_n) **est à termes strictement positifs** (et il faudra alors le mentionner sur la copie pour justifier votre démarche), étude de la position de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.

Exemple 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n$. On a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$$

donc la suite $(u_n)_n$ est croissante.

Exercice 2. Soit (v_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n + \ln(2 - v_n) \end{cases}$$

On a vu : pour tout entier n, v_n est bien défini et appartient à $[0, 1]$.

2. Montrer que (v_n) est croissante.

3.2 Autres méthodes

Les méthodes exposées ci-dessous sont moins habituelles, et feront normalement l'objet d'un guidage de la part de l'énoncé.

3.2.1 Étude du signe de $f(x) - x$

Si la méthode précédente ne permet pas de conclure, il faut creuser un peu plus profond. On peut alors utiliser :

Proposition 1.
Soit (u_n) une suite obéissant à la relation de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que tous les termes de la suite (u_n) sont dans un même intervalle I.

- *Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) - x \geqslant 0$, alors (u_n) est croissante.*
- *Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) - x \leqslant 0$, alors (u_n) est décroissante.*

Démonstration. Plaçons-nous par exemple dans le premier cas. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathrm{I}$; on peut donc appliquer la propriété avec $x = u_n$, et écrire $f(u_n) - u_n \geqslant 0$; ce qui s'écrit aussi $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
On a obtenu : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$: (u_n) est croissante. □

Exemple 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 \in]0,1[$, et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1[$.
2. Montrer : $\forall\, x \in]0,1[,\ \sqrt{x} \geqslant x$. En déduire la monotonie de la suite (u_n).

3.2.2 Utilisation de la monotonie de f

Il faut commencer par

dresser le tableau de variation de f sur I.

Un cas important est alors celui où la fonction f est croissante sur I.

Dans ce cas, supposons que $u_0 \leqslant u_1$. Par croissance de f, on aura alors $f(u_0) \leqslant f(u_1)$, soit $u_1 \leqslant u_2$ et ainsi de suite : par récurrence, on voit que (u_n) est croissante. Au contraire, si $u_0 \geqslant u_1$, on obtient par les mêmes arguments que (u_n) est décroissante.
En résumé :

Si f est croissante sur I, alors la suite (u_n) est monotone ; son sens de variation est donné par la position relative de u_0 et u_1.

Remarque 2. Ce résultat n'est pas utilisable tel quel sur une copie, et devra être redémontré dans le contexte proposé.

Éviter l'erreur classique qui consiste à affirmer que si f est croissante sur I, la suite (u_n) est aussi croissante.

La position relative de u_0 et u_1 peut être facilement déterminée si on dispose d'une valeur pour u_0 ; dans les cas les plus embêtants, on peut avoir à étudier le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ pour en déduire le signe de $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0$.

Si f est décroissante sur I, c'est plus compliqué… Une stratégie consistera à étudier les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), qui seront monotones. Ceci fera l'objet d'indications.

Remarque 3. Le tableau de variation de f peut montrer que f est croissante sur certains intervalles, et décroissante sur d'autres. Pour pouvoir utiliser les arguments de monotonie précédents, il faut avoir déterminé un intervalle I dans lesquels seront tous les termes de la suite (u_n) (où au moins APCR) ; on utilise alors la monotonie de f *sur cet intervalle.*

3.3 Convergence

Une fois qu'on a étudié la monotonie de (u_n), on peut étudier sa convergence. Les arguments suivants supposent que (u_n) est monotone, au moins à partir d'un certain rang. On cherche alors à utiliser le théorème de convergence monotone. Les cas typiques sont les suivants :

- (u_n) est croissante et majorée, ou décroissante et minorée : on applique le théorème et on conclut à la convergence.
- Si (u_n) est croissante et non majorée, elle tend vers $+\infty$; si (u_n) est décroissante et non minorée, elle tend vers $-\infty$.

Remarque 4. Attention, le théorème de convergence monotone **ne donne pas** la valeur de la limite. Il est donc faux de dire que : « (u_n) est décroissante, et minorée par -1, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$ » .
On dispose cependant d'arguments généraux pour déterminer la valeur de la limite.

Définition 2. *On dit que* ℓ *est un* point fixe de f *ssi* $f(\ell) = \ell$.

Théorème 2 (Théorème du point fixe)**.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite vérifiant la relation de récurrence :*
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. *On suppose que* (u_n) *converge vers* ℓ*, et que* f *est continue en* ℓ*. Alors* $f(\ell) = \ell$.

Autrement dit : **si** une telle suite converge, c'est vers un point fixe de f.

Exercice 3. Soit (v_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n + \ln(2 - v_n) \end{cases}$$

On a vu : pour tout entier n, v_n est bien défini et appartient à $[0,1]$; et que la suite (v_n) est croissante.

3. En déduire que (v_n) converge, et donner sa limite.

Le théorème du point fixe a plusieurs conséquences :

- ***Si on a démontré la convergence de*** (u_n) (notamment à l'aide des théorèmes de convergence monotone), ce critère nous donne la limite. Si l'équation $f(\ell) = \ell$ admet plusieurs solutions, le « choix » de la limite se fait en localisant les termes de la suite : par exemple, si tous les termes de la suite sont positifs, elle ne pourra pas converger vers -1. Il est très important de noter qu'il faut d'abord montrer que la suite converge.

  Exemple 5. On reprend la suite de l'exemple 4. Montrer que (u_n) converge ; donner sa limite.

- On peut utiliser ce résultat pour montrer que (u_n) ne converge pas.
  Supposons en effet que les u_n soient dans un intervalle $[a, b]$. Si (u_n) converge, alors sa limite $\ell \in [a, b]$ vérifie $f(\ell) = \ell$. Par l'absurde, si f n'admet pas de point fixe dans $[a, b]$, alors la suite ne peut pas converger.

  Exemple 6. Voir $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ dans les exercices.

- Dans ces cas de non-convergence, la monotonie peut encore servir à déterminer le comportement de la suite : par exemple, si (u_n) est croissante et qu'elle ne peut pas converger, alors $u_n \to +\infty$.

3.4 Utilisation de l'IAF

Une technique usuelle dans l'étude de suites récurrentes est la démonstration de la convergence à l'aide de l'inégalité des accroissements finis. Le principe est grosso modo le suivant :

- Par divers moyens, on a montré que tous les u_n sont dans un intervalle I.
- Cet intervalle I vérifie les deux choses suivantes :
  - il contient un point fixe ℓ ;
  - $\forall\, x \in \mathrm{I},\ \left|f'(x)\right| \leqslant k$, avec $0 \leqslant k < 1$.
- L'inégalité des accroissements finis donne alors, pour tous $(x, y) \in \mathrm{I}^2$: $\left|f(y) - f(x)\right| \leqslant k\left|y - x\right|$.
- Notamment, en appliquant cela avec $x = \ell$ et $y = u_n$ (qui appartiennent bien tous deux à I), on montre :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \left|f(u_n) - f(\ell)\right| \leqslant k\,|u_n - \ell| \ \text{, soit encore}\ \ |u_{n+1} - \ell| \leqslant k\,|u_n - \ell|$$

- Une récurrence sans difficulté notable montre alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant k^n\,|u_0 - \ell|$$

- Avec l'hypothèse faite sur k, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$; on en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = 0$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

3.5 Exercices

Exercice 4 (Scénario usuel)**.**
Soit (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n\, e^{-2u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) est à termes strictement positifs.
2. Quelle est la monotonie de (u_n) ?
3. En déduire que (u_n) converge, et donner sa limite.

Exercice 5 (Une utilisation détournée du théorème du point fixe)**.**
Soit (w_n) définie par :

$$\begin{cases} w_0 > 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = w_n + \dfrac{1}{w_n} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier n, w_n est bien défini et $w_n > 0$.
2. Montrer que (w_n) est croissante.
3. On suppose que (w_n) est majorée ; montrer qu'alors (w_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et aboutir à une contradiction.
4. Que dire alors de w_n pour $n \to +\infty$?

Exercice 6 (Un cas particulier de suite logistique)**.**
Soit (t_n) définie par :

$$\begin{cases} t_0 \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[\\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = 2t_n(1 - t_n) \end{cases}$$

1. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ t_n \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.
2. Montrer que (t_n) est croissante.
3. En déduire que (t_n) converge, et donner sa limite.
4. On suppose maintenant $t_0 \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.
   Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ t_n \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. La suite (t_n) est-elle convergente ? Si oui, vers quelle valeur ?

Exercice 7 (Avec l'IAF)**.**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Montrer par récurrence que u_n est bien défini, et que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Soit $f(x) = \sqrt{2 + x}$: montrer : $\forall\, x \in [0, 2],\ \left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
3. En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1} - 2\right| \leqslant \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left|u_n - 2\right|$
4. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \left|u_n - 2\right| \leqslant 2\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$. Conclure sur la convergence de (u_n).