TD3

Relations de comparaison

Exercice 1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.
2. si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
3. si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n^5 \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^5$
4. si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^n$
5. si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $1 + u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 + v_n$
6. si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n + w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
7. si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\big(\ln(v_n)\big)$.

Exercice 2. (*) Déterminer des équivalents simples des suites suivantes :

1. $\left(n^4 + 3 + 3^n\right)\left(e^{-2n} + 1\right)$
2. $e^{\frac{1}{\ln(n)}} - 1$
3. $\ln\left(1 + e^{-n^2}\right)$.
4. $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$
5. $\dbinom{n}{k}$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$ fixé).
6. $\left(\dfrac{2^n + 1}{2^n}\right)^3 - 1$
7. $\ln\left(n^2 + n + 1\right)$
8. $\dfrac{e^{1/2n} - 1}{e^{1/2n} + 1}$
9. $e^{n+1-\frac{1}{n}}$
10. $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{3/5} (1 + n)^{5/3}$

Exercice 3. (*)
Calculer les limites pour $n \to +\infty$ des suites suivantes en utilisant des relations de comparaison :

1. $\dfrac{n^3 + e^n - \ln(n)}{n^4 - n^2 + \sqrt{n}}$
2. $(n^2 - n)\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}} - 1\right)$
3. $(2n-2)\ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)$
4. $\dfrac{e^{-n}}{\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)}$
5. $\dfrac{\ln(n^3 - 2)}{\sqrt{3n^2 + 1}}$
6. $\dfrac{\ln\left(\dfrac{2^n + 1}{2^n}\right)}{2^{-n+1}}$
7. $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
8. $\left(1 + e^{-n}\right)^{n^2}$
9. $\dbinom{n}{k} x^n$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, et $x \in [0, 1[$)
(on écrira x^n sous forme d'une exponentielle)

Exercice 4. Déterminer un équivalent de (u_n) sous les hypothèses suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 2$
3. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n+1 \leqslant u_n \leqslant n+3$
4. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n-1 \leqslant u_n^2 \leqslant n+3\sqrt{n}$ (avec $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$)
5. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - e^n \leqslant n$

Exercice 5. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ces deux suites pour que $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$. Donner un exemple où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, et $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{v_n})$.
2. On suppose que :
   - (u_n) et (v_n) sont à termes strictement positifs ;
   - $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$
   - (u_n) et (v_n) tendent vers une limite ℓ, où $\ell \in \mathbb{R}_+$ ou $\ell = +\infty$.

   Montrer que si $\ell \neq 1$, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$. Montrer que si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

Exercice 6. Soit $k > 0$. On cherche à montrer que $k^n = o(n!)$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{k^n}{n!}$.

1. Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant \dfrac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}$.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Conclure.

Exercice 7. La série harmonique.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$; en déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k} \geqslant \ln(k+1) - \ln k$.
2. En déduire que $\mathrm{H}_n \to +\infty$. On va maintenant montrer que $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
3. Soit la suite $u_n = \mathrm{H}_n - \ln n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n \leqslant u_{n-1}$.
4. En déduire que (u_n) converge, puis que $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

NB : On note traditionnellement $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} \big(\mathrm{H}_n - \ln(n)\big)$. On a $\gamma \simeq 0.57721566...$; γ est nommée *constante d'Euler-Mascheroni.*

Exercice 8 (Équivalent d'une somme par comparaison série-intégrale)**.**

Soit $p \in \mathbb{N}$, et $S_N = \sum_{k=1}^{N} k^p$. On cherche à donner un équivalent de S_N pour $N \to +\infty$.

1. Montrer : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \int_{k-1}^{k} t^p \,\mathrm{d}t \leqslant k^p \leqslant \int_{k}^{k+1} t^p \,\mathrm{d}t$.
2. En déduire un encadrement de S_N pour $N \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer : $S_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{N^{p+1}}{p+1}$.
4. Vérifier à l'aide de formules connues votre résultat pour $p \in \{1, 2, 3\}$.

Solutions

1

1. Non : considérer $u_n = n$ et $v_n = n+2$.
2. non : considérer $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = e^{-n}$
3. Oui (voir cours)
4. Non : considérer $u_n = 1$ et $v_n = 1+\frac{1}{n}$: $u_n^n \to 1$ et $v_n^n \to e$.
5. Non : prendre $u_n = \frac{1}{n} - 1$ et $v = \frac{1}{n^2} - 1$. (u_n) et (v_n) tendent vers $-1 \neq 0$ donc sont toutes deux équivalentes à -1, donc équivalentes ; et $u_n + 1 = \frac{1}{n}$ et $v_n + 1 = \frac{1}{n^2}$ ne sont pas équivalentes.
6. Oui (voir cours)
7. Non : $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = n$; on obtient alors $\ln(u_n) = \frac{1}{2}\ln(v_n)$.

2

1. $\left(n^4+3+3^n\right)\left(e^{-2n}+1\right) \sim 3^n \times 1 = 3^n$
2. $e^{\frac{1}{\ln(n)}} - 1 \sim \frac{1}{\ln(n)}$ (avec $\frac{1}{\ln(n)} \to 0$)
3. $\ln\left(1+e^{-n^2}\right) \sim e^{-n^2}$ (avec $e^{-n^2} \to 0$).
4. $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \sim -\frac{2}{n^2}$ après mise au même dénominateur.
5. $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$
6. $= \left(1+\frac{1}{2^n}\right)^3 - 1 \sim \frac{3}{2^n}$ avec $\frac{1}{2^n} \to 0$.
7. $\ln\left(n^2+n+1\right) \sim 2\ln(n)$ mais sans passer les équivalents au logarithme !!
8. $\frac{e^{1/2n}-1}{e^{1/2n}+1} \sim \frac{\frac{1}{2n}}{2}$
9. $e^{n+1-\frac{1}{n}} \sim e^{n+1}$
10. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3/5}(1+n)^{5/3} \sim n^{5/3}$

3 Éléments de réponse :

1. $\sim \frac{e^n}{n^4} \to +\infty$
2. $\sim n^2\left(\frac{1}{2n^2}\right) \to \frac{1}{2}$
3. $\sim 2n \times \frac{1}{n+2} \to 2$
4. $\sim ne^{-n} \to 0$
5. $\sim \frac{3\ln(n)}{\sqrt{3}n} \to 0$
6. $\sim \frac{\frac{1}{2^n}}{2^{-n+1}} = \frac{1}{2}$
7. $\to e$
8. $\to 1$
9. $\sim \frac{n^k}{k!}x^n = \frac{1}{k!}n^k e^{n\ln(x)}$. $\ln(x) < 0$ sur $]0,1[$ donc on a une croissance comparée puissance / exponentielle décroissante : $n^k e^{n\ln(x)} = 0$.
   NB : manip non valable sur $x = 0$ mais alors la suite est nulle...

4 Éléments de réponse :

1. $u_n \to 3 \neq 0$ donc $u_n \sim 3$.
2. De même $nu_n \sim 2$ d'où en divisant $u_n \sim \frac{2}{n}$.

3. Par théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{n}=1$: $u_n \sim n$.

4. Comme au dessus on montre que $u_n^2 \sim n$ d'où par passage à la racine $\sqrt{u_n^2}\sim\sqrt{n}$ et $u_n\sim\sqrt{n}$ car $u_n \geqslant 0$.

5. L'encadrement s'écrit aussi $\forall\, n\in\mathbb{N},\ e^n \leqslant u_n \leqslant n+e^n$ en par gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{e^n}=1$: $u_n\sim e^n$.

5 Solution :

1. $$e^{u_n}\sim e^{v_n} \Leftrightarrow \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}}\to 1 \Leftrightarrow e^{u_n-v_n}\to 1 \Leftrightarrow u_n-v_n\to 0$$

   Avec $u_n=n^2-n$ et $v_n=n^2$ on a bien $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$; mais $\dfrac{e^{u_n}}{e^{v_n}}=e^{u_n-v_n}=e^{-n}\to 0$ donc $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^{v_n}\right)$

2. On écrit
   $$\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)}=\frac{\ln\left(v_n\times\dfrac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)}=\frac{\ln(v_n)+\ln\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)}=1+\frac{\ln\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)}$$
   $u_n\sim v_n$ donc $\dfrac{u_n}{v_n}\to 1$, donc $\ln\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)\to 0$.

   Si $v_n\to\ell\neq 1$, alors $\ln(v_n)\to\begin{cases}-\infty \text{ si } \ell=0\\ \ln(\ell)\neq 0 \text{ si } \ell>0,\ \ell\neq 1\\ +\infty \text{ si } \ell=+\infty\end{cases}$; et dans tous ces cas $\dfrac{\ln\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)}\to 0$; d'où on déduit $\dfrac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)}\to$ 1 puis $\ln(u_n)\sim\ln(v_n)$.

   Si $\ell=1$: considérons par exemple $u_n=1+e^{-n}$ et $v_n=1+\dfrac{1}{n}$.

   On a bien $u_n\sim 1$ et $v_n\sim 1$ (ces suites tendent vers 1) ; et $\ln(u_n)\sim e^{-n}$, $\ln(v_n)\sim\dfrac{1}{n}$ en vertu de l'équivalent classique $\ln(1+u_n)\sim u_n$ pour (u_n) tendant vers 0 en $+\infty$.

   e^{-n} et $\dfrac{1}{n}$ ne sont pas équivalents ; donc $\ln(u_n)$ et $\ln(v_n)$ ne le sont pas non plus.

6 Solution :

1. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{k}{n+1}$ après simplifications ; donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\to 0$.
   Par définition de la limite, on en déduit directement le résultat voulu.

2. Montrer que : $\forall\, n\geqslant n_0,\ u_n\leqslant\dfrac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}$.

   On effectue une récurrence.

   - Au rang n_0, on a bien $u_{n_0}\leqslant\dfrac{u_{n_0}}{2^{n_0-n_0}}=u_0$: la propriété est vraie au rang n_0.
   - Soit $n\geqslant n_0$ tel que $u_n\leqslant\dfrac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}$.

     $n\geqslant n_0$ donc par la question 1, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\dfrac{1}{2}$, ce qui donne $u_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{2}u_n$ après multiplication par $u_n>0$.

     Ainsi :
     $$u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}u_n\leqslant\frac{1}{2}\frac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}=\frac{u_{n_0}}{2^{n+1-n_0}}$$
     en utilisant la propriété au rang n ; ce qui donne l'hérédité.
   - On a donc :$\forall\, n\geqslant n_0,\ u_n\leqslant\dfrac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}$.

3. Comme $u_n>0$ pour tout n, on a l'encadrement :
   $$\forall\, n\geqslant n_0, 0\leqslant u_n\leqslant\frac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}$$
   Comme $\dfrac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}\to 0$, le théorème des gendarmes donne $u_n\to 0$, donc $\dfrac{k^n}{n!}\to 0$; ce qui implique que $k^n=o(n!)$.

7 Solution

1. Étude ultra-classique de la fonction $x\mapsto\ln(1+x)-x$ sur $]-1,+\infty[$: un tableau de variation montre que cette fonction ne prend que des valeurs négatives.

   $\ln(k+1)-\ln(k)=\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)=\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$ donc il faut montrer $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\leqslant\dfrac{1}{k}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$; ce qui renvient à appliquer l'inégalité précédente à $x=1/k$ (on a bien $1/k>-1$)

2. On somme cette dernière inégalité pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) = \ln(n+1) - \ln(1) \qquad \text{par téléscopage}$$

donc $\mathrm{H}_n \geqslant \ln(n+1)$. Comme $\ln(n+1) \to +\infty$, par minoration on a aussi $\mathrm{H}_n \to +\infty$.

3. Avec la minoration précédente : $\mathrm{H}_n - \ln(n) \geqslant \ln(n+1) - \ln(n) \geqslant 0$ (croissance de la fonction ln).
Calculons

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \mathrm{H}_n - \ln(n) - (\mathrm{H}_{n-1} - \ln(n-1)) \\ &= \mathrm{H}_n - \mathrm{H}_{n-1} + \ln(n-1) - \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

mais avec $n \geqslant 2$, $-\frac{1}{n} \geqslant -\frac{1}{2} > -1$ donc on peut appliquer la question 1 et écrire $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant -\frac{1}{n}$; donc $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \leqslant 0$.
On a bien : $\forall\, n \geqslant 2,\ u_n - u_{n-1} \leqslant 0$: la suite (u_n) est décroissante.

4. Décroissante et minorée par 0 : (u_n) converge.
On étudie le quotient :

$$\frac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + u_n}{\ln(n)} = 1 + \frac{u_n}{\ln(n)}$$

et avec $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$ et $\ln(n) \to +\infty$ on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)} = 1$$

donc $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

8 Indications :

1. Croissance de l'intégrale : si $f(t) \leqslant g(t)$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
Par croissance de $t \mapsto t^p$:
sur $[k-1,k]$, $t^p \leqslant k^p$ donc $\displaystyle\int_{k-1}^{k} t^p\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} k^p\,\mathrm{d}t = k^p$
et sur $[k,k+1]$, $t^p \geqslant k^p$ donc $\displaystyle\int_{k}^{k+1} t^p\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{k}^{k+1} k^p\,\mathrm{d}t = k^p$ donc on a l'encadrement.

2. On somme pour k allant de 1 à N :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \left(\int_{k-1}^{k} t^p\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^1 t^p\,\mathrm{d}t + \int_1^2 t^p\,\mathrm{d}t + \ldots + \int_{\mathrm{N}-1}^{\mathrm{N}} t^p\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{N}} t^p\,\mathrm{d}t$ par Chasles ; et de même
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \left(\int_{k}^{k+1} t^p\,\mathrm{d}t\right) = \int_1^{\mathrm{N}+1} t^p\,\mathrm{d}t.$
On trouve finalement

$$\int_0^{\mathrm{N}} t^p\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k^p \leqslant \int_1^{\mathrm{N}+1} t^p\,\mathrm{d}t$$

et en calculant ces intégrales :

$$\frac{\mathrm{N}^{p+1}}{p+1} \leqslant \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k^p \leqslant \frac{(\mathrm{N}+1)^{p+1} - 1}{p+1}$$

3. À l'aide de l'encadrement précédent on trouve

$$1 \leqslant \frac{\mathrm{S_N}}{\frac{\mathrm{N}^{p+1}}{p+1}} \leqslant \left(1 + \frac{1}{\mathrm{N}}\right)^{p+1} - \frac{1}{\mathrm{N}^{p+1}}$$

et par gendarmes $\dfrac{\mathrm{S_N}}{\frac{\mathrm{N}^{p+1}}{p+1}} \to 1.$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)}{2} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{N}^2}{2}$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k^2 = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)(2\mathrm{N}+1)}{6} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\sim} \frac{2\mathrm{N}^3}{6} = \frac{\mathrm{N}^3}{3}$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k = \left(\frac{\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)}{2}\right)^2 \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\mathrm{N}^2}{2}\right) = \frac{\mathrm{N}^4}{4}.$
La formule est bien vérifiée.