Comparaison de suites

Les outils de comparaison des suites permettent de formaliser correctement les notions de suite « très petite » devant une autre suite (c'est ce qui se passe dans toutes les propriétés dites de croissances comparées), ou de deux suites « ayant le même ordre de grandeur » .
Les croissances comparées vues en ECG1 permettent de construire une échelle de comparaison, qui servira de référence pour l'étude de suites quelconques.
Ce formalisme s'accompagne de règles de calcul, qui vont permettre de l'appliquer, entre autres, au calcul de limites et à des études de convergence de séries, ou, plus tard, de convergence d'intégrales (avec les mêmes outils sur les fonctions).

1 Relation o : suite négligeable devant une autre

La relation o (lire : « petit o ») définit le caractère *négligeable* d'une suite par rapport à une autre, le fait qu'une suite soit « très petite devant » une autre.

La définition suivante est assez formelle :

Définition 1. *On dit que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) si et seulement si il existe une suite (ε_n) telle que :*

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \varepsilon_n v_n$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Et en pratique, on utilise surtout le critère suivant :

Proposition 1 (et, en pratique, **Définition**). *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.*
Si on suppose que v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

Exemple 1. On a

$$n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^2\right) \quad ; \quad \ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sqrt{n}\right) \quad ; \quad n^3 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^n\right)$$

Les deux derniers exemples résultant des croissances comparées.

Méthode :

Pour montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, on montrera souvent que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

(mais on aura parfois des moyens plus pratiques ; cf. règles de calcul plus loin)

On dispose de quelques propriétés utiles :

Corollaire 2.

- ***Les constantes multiplicatives ne sont pas importantes dans la relation de négligeabilité :*** *si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on a les équivalences :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\alpha v_n) \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \quad \text{et} \quad \alpha u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$$

- *Toute suite négligeable devant une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ tend vers 0.*
- *Une suite (u_n) tend vers 0 si et seulement si : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$.*

2 Exemples fondamentaux : échelles de comparaison

Pour $n \to +\infty$, les croissances comparées donnent l'échelle de comparaison usuelle : les puissances l'emportent devant les logarithmes, et les exponentielles devant les puissances.
(NB : on désigne aussi par « exponentielles » les suites de la forme $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, car pour $a>0$ on a $a^n = e^{n\ln(a)}$.

On obtient une échelle pour les suites tendant vers $+\infty$:

Proposition 3 (Échelle de comparaison des suites de référence - cas de la limite infinie)**.**

- $\forall(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ (\ln n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^\beta\right)$ *[comparaison ln / puissances]*
- $\forall(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+^*)^2, \alpha<\beta \Rightarrow\ n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^\beta\right)$ *[comparaison entre puissances]*
- $\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^*, \forall a>1,\ n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(a^n)$ *[comparaison puissances / exponentielles]*
- $\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ a<b \Rightarrow a^n \underset{n\to+\infty}{=} o(b^n)$ *[comparaison entre exponentielles]*
- $\forall a>1,\ a^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$
- $n! \underset{n\to+\infty}{=} o(n^n)$

(on retrouve ici l'exemple 1)

On obtient une autre échelle pour les suites tendant vers 0 (essentiellement ce sont les inverses des précédentes) :

Proposition 4 (Échelle de comparaison des suites de référence - cas de la limite nulle)**.**

- $\forall(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ \dfrac{1}{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{(\ln n)^\alpha}\right)$
- $\forall(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+^*)^2, \alpha<\beta \Rightarrow\ \dfrac{1}{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$
- $\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^*, \forall a\in]-1,1[,\ a^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$

Par exemple, $\dfrac{1}{n^4} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, et $e^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exemple 2. Pour les suites (u_n) et (v_n) suivantes, a-t-on $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$? $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$? aucun des deux ?

$$u_n = \ln(n) \qquad v_n = n$$

$$u_n = \ln(n)^{1000} \qquad v_n = \sqrt{n}$$

$$u_n = \frac{1}{n} \qquad v_n = \frac{1}{n\ln(n)}$$

$$u_n = e^{2n} \qquad v_n = n^4$$

$$u_n = e^{-n} \qquad v_n = e^{-n+1}$$

$$u_n = \ln(n) \qquad v_n = \ln\left(n^2\right)$$

$$u_n = 2^n \qquad v_n = 3^n$$

3 Relation $\sim$: équivalence

La relation d'équivalence traduit le fait que deux suites ont le même « ordre de grandeur » à l'infini.
Ici aussi on commence par une définition très générale mais difficile d'utilisation en pratique :

Définition 2. *On dit que les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes si et seulement si il existe une suite (α_n) telle que :*

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha_n v_n$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$

On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

En pratique, on utilise surtout le critère suivant :

Proposition 5 (et, en pratique, **Définition**)**.**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.
Si on suppose que v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Exemple 3. On a

$$n^2 + n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \quad ; \quad \sqrt{n} + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n} \quad ; \quad \sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$$

On utilise souvient directement la définition pour montrer une équivalence :

Méthode :

Pour montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, on montrera souvent que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

(mais ici encore on aura parfois d'autres moyens)

Remarque 1.

- Si $\frac{u_n}{v_n} \to 1$, on a également $\frac{v_n}{u_n} \to 1$: donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$

(on dit que la relation d'équivalence est *symétrique*)

- La seule suite équivalente à la suite nulle est la suite nulle elle-même : on n'écrira donc **jamais** « $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ » pour une suite qui ne devient pas nulle APCR (et donc, en pratique, on ne l'écrira jamais.)
- Deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang (ceci sera important car beaucoup de théorèmes s'appliquent à des suites de terme général positif).
- Deux suites équivalentes sont soit toutes les deux convergentes vers la même limite (finie ou infinie), soit toutes deux divergentes.
- Si (u_n) une suite convergeant vers $\ell \neq 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.
(Attention, en vertu d'une remarque précédente, cela ne fonctionne pas si $\ell = 0$!)

- On peut montrer que $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, et on aura alors tendance à écrire : « $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n)$ ». Mais......
- **Attention, erreur très fréquente !**
Le point précédent montre que « l'équivalent d'**une somme** est son terme dominant » :
si $u_n = v_n + w_n$ avec $w_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Par exemple, $n + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Par contre cela ne marche pas pour un produit : avec le même exemple on **n'a pas** $n\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ (le quotient $\dfrac{n\ln(n)}{n}$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$).
- Une bonne idée est alors de *conjecturer* l'équivalent en recherchant le « terme dominant » ; puis dans un second temps de *montrer* qu'on a bel et bien équivalence en étudiant le quotient.
Par exemple, si $u_n = n + \ln(n)$, les arguments précédents laissent penser que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
On écrit alors :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+\ln(n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \underbrace{\frac{\ln(n)}{n}}_{\to 0} = 1$$
ce qui démontre bien que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Exemple 4. Donner les équivalents les plus simples possibles des suites suivantes :

$$u_n = 3n^2 + n \qquad v_n = \sqrt{n^3 + n^2} \qquad w_n = \sqrt{n} + n\ln n$$
$$x_n = 2^n + 3^n \qquad y_n = e^n - 4n^{53} + 2 \qquad z_n = \ln\left(n^3\right)$$

3.1 Compatibilité avec les opérations

Dans ce qui suit, pour alléger un peu le formulaire, on écrira souvent « $\sim$ » pour « $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ », et « $= o(\,)$ » pour « $\underset{n\to+\infty}{=} o(\,)$ ».

C'est en général une mauvaise idée car on ne sait alors plus de quelle limite on parle (cas où on a deux indices k et n dans l'expression à étudier par exemple).

Une telle pratique vous est donc **interdite** (c'est pour votre bien !).

L'équivalence est *compatible avec le produit* : si $(x_n), (y_n), (z_n), (t_n)$ sont quatre suites de réels non nuls (au moins à partir d'un certain rang), alors :

- $x_n \sim y_n \Rightarrow x_n z_n \sim y_n z_n$.
- $\left(x_n \sim y_n \text{ et } z_n \sim t_n\right) \Rightarrow x_n z_n \sim y_n t_n$.

On peut donc multiplier des équivalents.
En reprenant les suites de l'exemple 4 :

$$(n^2+2n)(\sqrt{n+1}) \sim n^2\sqrt{n} = n^{5/2} \ ; \ n\left(2^n+3^n\right) \sim n3^n$$

On peut aussi prendre des puissances :

Si $x_n \sim y_n$, on a aussi :

- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x_n^k \sim y_n^k$ (k étant ici une puissance **fixe**).
- si les deux suites sont à termes positifs, $\sqrt{x_n} \sim \sqrt{y_n}$
- si les deux suites ne s'annulent pas APCR, $\dfrac{1}{x_n} \sim \dfrac{1}{y_n}$.
- Avec le premier et le troisième point, on a finalement, pour deux suites qui ne s'annulent pas APCR : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x_n^k \sim y_n^k$.

Le troisième point, et la compatibilité avec le produit, fait qu'on peut aussi diviser des équivalents : si $(x_n), (y_n), (z_n), (t_n)$ sont quatre suites de réels non nuls (au moins à partir d'un certain rang), alors :

$$\left(x_n \sim y_n \text{ et } z_n \sim t_n\right) \Rightarrow \frac{x_n}{z_n} \sim \frac{y_n}{t_n}$$

Ainsi, par exemple :

$$\frac{\sqrt{n}+n\ln(n)}{n^2+2n} \sim \frac{n\ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{n}$$

ATTENTION : on ne peut par contre pas additionner ou soustraire des équivalents.

Si $x_n \sim y_n$, on n'a pas forcément $x_n + z_n \sim y_n + z_n$.

Par exemple : $n^2+n \sim n^2+1$, $-n^2 \sim -n^2$, mais $(n^2+n)-n^2 = n$ n'est pas équivalent à $(n^2+1)-n^2 = 1$.

Il existe beaucoup de lois mettant en jeu les relations o et $\sim$. Exemples :

- $\left(x_n = o(y_n) \text{ et } y_n = o(z_n)\right) \Rightarrow \left(x_n = o(z_n)\right)$ (transitivité).
- $\left(x_n = o(z_n) \text{ et } y_n = o(z_n)\right) \Rightarrow \left(x_n + y_n = o(z_n)\right)$ (compatibilité avec +)
- $\left(x_n = o(y_n) \text{ et } y_n \sim z_n\right) \Rightarrow \left(x_n = o(z_n)\right)$.
- $\left(x_n \sim y_n \text{ et } y_n = o(z_n)\right) \Rightarrow \left(x_n = o(z_n)\right)$
- $\left(x_n \sim z_n \text{ et } y_n = o(z_n)\right) \Rightarrow \left(x_n + y_n \sim z_n\right)$.

Un résultat assez important en pratique permet de comparer deux suites en se ramenant à leurs équivalents ;

Soient (u_n), (v_n), (a_n), (b_n) 4 suites réelles telles que

$$u_n \sim a_n \qquad \text{et} \qquad v_n \sim b_n$$

Alors (u_n) et (v_n) d'une part, et (a_n) et (b_n) d'autre part,
se comparent de la même manière :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow a_n \sim b_n \qquad\qquad u_n = o(v_n) \Leftrightarrow a_n = o(b_n)$$

Ainsi :

> **Méthode :**
> **Si on a à comparer des expressions « compliquées » , on peut en chercher des équivalents simples, puis comparer ces équivalents (cf. exemple 5 pour des utilisations de cette méthode)**

3.2 Des équivalents usuels

On donne ici quelques équivalents classiques d'usage fréquent.

Dans le cas des suites polynomiales, l'équivalent est le terme de plus haut degré :

> **Proposition 6** (Équivalent d'un polynôme)**.**
>
> $$\textit{Si } u_n = a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k, \textit{ avec } k \in \mathbb{N} \textit{ et } a_k \neq 0, \textit{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_k n^k.$$

Cette propriété se généralise en fait à toute collection de puissances de n : à l'infini la plus grande puissance l'emporte. Par exemple

$$\frac{1}{n} - \frac{4}{\sqrt{n}} + 3n^{1/3} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n^{1/3}$$

(en écrivant cette expression comme $n^{-1} - 4n^{-1/2} + 3n^{1/3}$).
Ou encore :

$$\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$$

Certaines limites usuelles vues l'année dernière permettent aussi le calcul d'équivalents :

> **Proposition 7** (Équivalents usuels)**.** *Soit une suite* (u_n) *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$*. Alors :*
>
> - $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
> - $e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
> - $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$ *(avec* $\alpha \neq 0$*)*

Démonstration. Les deux premières propriétés se déduisent des limites usuelles :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

La dernière passe par un taux de variation : posons $h : x \mapsto (1+x)^\alpha$. h est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$.
Or on sait que $h'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x)-h(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$; on obtient finalement

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

et on en déduit le résultat de manière analogue aux 2 précédents. □

Attention : si $u_n \sim v_n$, on n'a pas en général $f(u_n) \sim f(v_n)$ (c'est notamment faux lorsque $f = \exp$, ou $f = \ln$).
Ce passage se traite au cas par cas : voir exercices.

Exemple 5. Comparer les suites suivantes :

$$u_n = \sqrt{2n+1} + 3\ln(n^2) \qquad \text{et} \qquad v_n = n + 2 - 7\sqrt{n}$$

$$u_n = n + \ln(n) \qquad \text{et} \qquad v_n = n - 2\sqrt{n}$$

$$u_n = \frac{1}{\ln(n+1)} + 2 \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 + e^{-n} + \frac{1}{n}$$

$$u_n = n^2 + n^3 - n^7 \qquad \text{et} \qquad v_n = e^{n/2} - n^8 + 7\sqrt{n}$$