ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2023-2024
Mathématiques

Devoir maison n°2
À rendre pour le 16/10

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$, et : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier la fonction f (variations, valeurs particulières, limites). Tracer un aperçu de la courbe représentative de f.
2. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \sqrt{2}$. Montrer que (u_n) est monotone ; en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

On évalue maintenant la vitesse de convergence de (u_n) vers $\sqrt{2}$.

3. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2u_n}$. En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|u_n - \sqrt{2}\right|^2$.
4. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant 10^{-2^{n-2}}$.
5. Donner une valeur de n telle que $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant 10^{-100}$. *NB : pour ce n, u_n est donc une approximation de $\sqrt{2}$ à une précision de 100 décimales...*
6. Écrire une fonction Python `approx(epsilon)` qui prend un argument un réel $\varepsilon > 0$ et renvoie le premier terme de (u_n) tel que $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 2

On s'intéresse à la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$, et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}.$$

On cherche dans un premier temps à donner la limite de la suite (u_n).

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$; en déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

On cherche maintenant à donner divers équivalents à l'infini.

4. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = u_n\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{u_n}} - 1\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n)$.

On admet ici le résultat suivant :

> Soit (x_n) une suite réelle, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}^*$. Alors si on pose $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k$, on a : $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ell$.

5. Montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}$.

On pose alors : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \dfrac{n}{2}$.

6. En admettant l'équivalent suivant :

> Si (x_n) est une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, alors : $\sqrt{1 + x_n} - 1 - \dfrac{1}{2}x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{8}x_n^2$.

   montrer que : $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{4n}$.

Dans les deux exercices suivants, on utilisera le résultat déjà vu en TD et en DS :

> Soient E un ev, F et G deux sev de E tels que $F \cap G = \{0_E\}$, et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.
> Si $(e_1, ..., e_p)$ et $(f_1, ..., f_q)$ sont des bases respectives de F et G, alors $(e_1, ..., e_p, f_1, ..., f_q)$ est une base de E.

Exercice 3 (Théorème du rang)

On considère ici une application linéaire de E (ev de dimension p) dans F (ev de dimension n) ; et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On note $r = \mathrm{rg}(f)$.

1. Soit $\mathscr{B} = (x_1, \dots, x_p)$ une base de E. Donner une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$; en déduire que $r \leqslant \dim(E)$.

Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. Il existe donc, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $e_i \in E$ tel que $f(e_i) = \varepsilon_i$.

2. Montrer que $(e_1, \dots, e_r)$ est libre.
3. Montrer que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
4. En déduire que, si $(u_1, \dots, u_k)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, la famille $(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$ est libre.

On va maintenant chercher à montrer que cette famille est génératrice de E.

5. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe des réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ tels que
$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \varepsilon_i$$
6. Montrer alors que : $x - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}(f)$; puis finalement que
$$x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$$

On peut maintenant conclure.

7. Montrer que $(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$ est une base de E.
8. En déduire le théorème du rang.

Exercice 4 (Projecteurs : facultatif)

On introduit ici les projecteurs. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1. *On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur ssi $f^2 = f$.*

On va voir que ceci conduit à beaucoup de propriétés intéressantes. Soit donc f un projecteur de E.

1. Soit $x \in E$. Montrer que $x - f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$.
2. En déduire que tout élément $x \in E$ peut s'écrire $x = x_K + x_I$, où $x_K \in \mathrm{Ker}(f)$ et $x_I \in \mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est exactement l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) = x$. En déduire l'existence d'une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B})$ soit diagonale, avec r « 1 » puis $n - r$ « 0 » sur la diagonale.
5. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
   (a) Montrer que f est un projecteur. Donner des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale, de coefficients diagonaux égaux à 0 ou 1.