Méthode
Étude de suites implicites.

1 Présentation

On appelle *suite implicite* une suite (u_n) telle que u_n est l'unique solution d'une certaine équation. Si l'équation en question est assez compliquée, on n'a donc pas de formule $u_n = f(n)$ à disposition. Pour étudier existence, monotonie, convergence, et autres propriétés de cette suite, on a donc recours à un ensemble de techniques usuelles d'étude d'une fonction. La marche à suivre est essentiellement toujours la même.

Au cours de ce polycopié nous traiterons les questions de l'exercice suivant (EM Lyon 2003) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\varphi_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall\, x \geqslant 0,\ \varphi_n(x) = e^{-x} - x^{2n-1}$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x > 0$ admet une unique solution, qu'on note u_n.
2. Montrer : $\forall\, n \geqslant 1,\ 0 < u_n < 1$.
3. Calculer $f_{n+1}(u_n)$. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
4. Montrer : $\forall\, n \geqslant 1,\ \ln(u_n) = -\dfrac{u_n}{2n-1}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
5. On pose alors $u_n = 1 + h_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0$. Montrer que $\ln(1+h_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$; en déduire que $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

(donc ne vous efforcez pas de le résoudre avant de tourner la page !)

2 Bonne définition de la suite

On a d'entrée de jeu une question d'existence : comme on ne sait pas résoudre l'équation proposée, il faut montrer l'existence de la solution sans pour autant donner cette solution. C'est une application du *théorème de la bijection* :

Théorème 1 (Théorème de la bijection)**.** *Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors f réalise une bijection de I sur $f(\mathrm{I})$: autrement dit, pour tout $y \in f(\mathrm{I})$, il existe un unique $x \in \mathrm{I}$ tel que $f(x) = y$.*

Remarque 1. Par continuité et monotonie de f, $f(\mathrm{I})$ est l'intervalle délimité par les valeurs de f aux « extrémités » de I (qui peuvent éventuellement être des limites).

L'ingrédient nécessaire à tout cela est donc d'avoir le tableau de variation de la fonction f_n, où figurent aussi les limites.

Sur notre exemple :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall\, x \geqslant 0,\ f_n(x) = e^{-x} - x^{2n-1}$.
Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x > 0$ admet une unique solution, qu'on note u_n.

3 Localisation des termes de la suite

Elle se fait en observant le tableau de variation de f_n, et en utilisant la monotonie de f_n. Par exemple, si f est strictement croissante, on aura $u_n \geqslant a$ ssi $f_n(u_n) \geqslant f_n(a)$. *Il suffit donc de calculer $f_n(a)$ pour connaître la position relative des nombres u_n et a.*

Sur notre exemple :

Montrer : $\forall\, n \geqslant 1,\ 0 < u_n < 1$.

4 Monotonie

On cherche donc à comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les termes u_{n+1} et u_n.
Comme précédemment, dans ces exercices on compare deux nombres en comparant leurs images par f_n. On a $f_n(u_n) = 0$ (donc aussi : $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$).
On retombe sur les arguments de la partie précédente en comparant $f_n(u_n)$ et $f_n(u_{n+1})$; ou $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$.

NB : le calcul des quantités $f_n(u_{n+1})$ et $f_{n+1}(u_n)$ peut être impossible ; par contre l'équation vérifiée par u_n nous permettra de déterminer le signe de cette quantité.

Sur notre exemple :

Calculer $f_{n+1}(u_n)$. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

5 Convergence, équivalents, propriétés diverses

Pour la suite de l'exercice, plus de méthode standard : on cherche à se servir de la relation $f_n(u_n) = 0$ (finalement l'info la plus solide qu'on possède sur u_n !) et on voit où cela nous mène...

Sur notre exemple :

- Montrer : $\forall\, n \geqslant 1,\ \ln(u_n) = -\dfrac{u_n}{2n-1}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- On pose alors $u_n = 1 + h_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0$. Montrer que $\ln(1+h_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$; en déduire que $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

Un autre exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = nx - e^{-x}$.

1. Dresser le tableau de variations de f_n. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution, qu'on note u_n.
2. Montrer que $u_n \geqslant 0$, puis que $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. En déduire un encadrement de u_n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. En calculant $f_{n+1}(u_n)$, déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Justifier que $u_n = \dfrac{e^{-u_n}}{n}$; en déduire un équivalent simple de u_n pour $n \to +\infty$.