ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2023-2024
Mathématiques

Devoir maison n°2

Corrigé

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$**. On considère la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **définie par :** $u_0 = 2$**, et :** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$**.**

1. **Étudier la fonction f (variations, valeurs particulières, limites). Tracer un aperçu de la courbe représentative de f.**

   f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de telles fonctions (le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$).

   En dérivant : $\forall\, x > 0,\ f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = \dfrac{x^2-2}{2x^2}$.

   Des limites usuelles donnent : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+0^+} f(x) = +\infty$; et $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

   On obtient le tableau :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2		$-$	0	$+$	
$2x^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. **Montrer :** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \sqrt{2}$**. Montrer que** (u_n) **est monotone ; en déduire que** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$**.**

   On remarque sur ce tableau que : $\forall\, x \geqslant \sqrt{2},\ f(x) \geqslant \sqrt{2}$.
   Procédons alors par récurrence :

   - D'après l'énoncé, $u_0 = 2$ et on a bien $2 \geqslant \sqrt{2}$;
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé ; on suppose $u_n \geqslant \sqrt{2}$; alors d'après notre remarque précédente $f(u_n) \geqslant \sqrt{2}$, ce qui renvient à : $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$ et la propriété est bien héréditaire.
   - On a bien montré : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \sqrt{2}$.

   Pour la monotonie, calculons :

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n} - 2u_n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{u_n} - u_n\right) = \frac{2-u_n^2}{2u_n}$$

   Or, pour tout n, $u_n \geqslant \sqrt{2}$ donc $u_n > 0$ et $u_n^2 \geqslant 2$, et donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$: (u_n) est décroissante.

   Comme elle est minorée par $\sqrt{2}$, on en conclut qu'elle converge vers $\ell \geqslant \sqrt{2}$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$; en passant à la limite $n \to +\infty$ on obtient $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{2}{\ell}\right)$ ce qui donne $\ell^2 = 2$, et comme on cherche une limite $\geqslant \sqrt{2}$, on conclut $\ell = \sqrt{2}$.
   On a bien montré : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

On évalue maintenant la vitesse de convergence de (u_n) ***vers*** $\sqrt{2}$**.**

3. **Montrer :** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2u_n}$**. En déduire :** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|u_n - \sqrt{2}\right|^2$**.**

   C'est du calcul :

   $$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{u_n^2+2}{2u_n} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}u_n}{2u_n} = \frac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2u_n}$$

en reconnaissant une identité remarquable.

Comme $u_n \geqslant \sqrt{2}$, on a $2u_n \geqslant 2\sqrt{2} \geqslant 1$ et donc : $\dfrac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2u_n} \leqslant \left(u_n-\sqrt{2}\right)^2$.

Avec ce qui précède :

$$\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right| = \left|\frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2u_n}\right| = \frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2u_n} \leqslant \left(u_n-\sqrt{2}\right)^2 = \left|u_n-\sqrt{2}\right|^2$$

(toutes les quantités dans les valeurs absolues sont positives).

4. **Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n-\sqrt{2}\right| \leqslant 10^{-2^{n-2}}$.**

   C'est évidemment une récurrence. Soit $\mathscr{P}(n)$: «$\left|u_n-\sqrt{2}\right| \leqslant 10^{-2^{n-2}}$».

   - $\mathscr{P}(1)$ s'écrit : $|u_1-\sqrt{2}| \leqslant 10^{2^{-1}} = 10^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.
     $u_0 = 2$ donc $u_1 = \dfrac{1}{2}\left(2+\dfrac{2}{2}\right) = \dfrac{3}{2} = 1.5$ et avec $\sqrt{2} \simeq 1.4$ on trouve $|u_1-\sqrt{2}| \simeq 0.1$ donc bien $\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{10}}$: la propriété est vraie au rang 1.

   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie.
     On a alors $0 \leqslant \left|u_n-\sqrt{2}\right| \leqslant 10^{-2^{n-2}}$, donc $\left|u_n-\sqrt{2}\right|^2 \leqslant \left(10^{-2^{n-2}}\right)^2$ (croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$) ; et donc
     $$\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right| \leqslant \left|u_n-\sqrt{2}\right|^2 \leqslant \left(10^{-2^{n-2}}\right)^2 = 10^{-2^{n-2}\times 2} = 10^{-2^{n-1}}$$
     ce qui donne $\mathscr{P}(n+1)$.
   - Par principe de récurrence on a bien $\mathscr{P}(n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

5. **Donner une valeur de n telle que $\left|u_n-\sqrt{2}\right| \leqslant 10^{-100}$. *NB : pour ce n, u_n est donc une approximation de $\sqrt{2}$ à une précision de 100 décimales...***

   Pour que $\left|u_n-\sqrt{2}\right| \leqslant 10^{-100}$, il suffit que $10^{-2^{n-2}} \leqslant 10^{-100}$.
   Cette inéquation se résout :

   $$\begin{aligned}
   10^{-2^{n-2}} \leqslant 10^{-100} &\Leftrightarrow \ln\left(10^{-2^{n-2}}\right) \leqslant \ln\left(10^{-100}\right) && \text{(stricte croissance du ln)}\\
   &\Leftrightarrow -2^{n-2}\ln(10) \leqslant -100\ln(10)\\
   &\Leftrightarrow -2^{n-2} \leqslant -100 && \text{division par } \ln(10) > 0\\
   &\Leftrightarrow 2^{n-2} \geqslant 100\\
   &\Leftrightarrow (n-2)\ln(2) \geqslant \ln(100)\\
   &\Leftrightarrow n \geqslant 2 + \frac{\ln(100)}{\ln(2)}
   \end{aligned}$$

   Avec $\dfrac{\ln(100)}{\ln(2)} \simeq 6,64$ on obtient que la première valeur de n qui convient est $n = 9$.

   NB : si on ne dispose pas de calculatrice on peut chercher à la main le premier entier tel que $2^{n-2} \geqslant 100$. On obtient après quelques multiplications que $2^6 = 64$ et $2^7 = 128$, donc on cherche n tel que $n-2 \geqslant 7$; et on retrouve $n = 9$ comme première valeur qui convient.

6. **Écrire une fonction Python `approx(epsilon)` qui prend un argument un réel $\varepsilon > 0$ et renvoie le premier terme de (u_n) tel que $|u_n-\sqrt{2}| \leqslant \varepsilon$.**

   Le cœur du programme sera une boucle `for` qui calcule successivement les termes de u_n par application de f. La question est de savoir combien de termes calculer. On peut adapter le cadre précédent pour obtenir, pour $\varepsilon \in]0,1[$:

   $$10^{-2^{n-2}} \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow n \geqslant 2 + \frac{\ln\left(-\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(10)}\right)}{\ln(2)}$$

   (respirez !!) et obtenir un premier programme :

```python
def approx(epsilon):
    u = 2 # u0
    N = 2+np.log(-np.log(epsilon)/np.log(10))/np.log(2)
                # rang du premier terme qui convient
    for k in range(N):
        u = 1/2*(u+2/u)
    return u
```

On peut, sinon, tester à chaque tour de boucle si on a atteint la précision requise en utilisant la majoration de la question 4. On s'arrête donc au premier n tel que $10^{-2^{n-2}} < \varepsilon$:

```python
def approx(epsilon):
    u = 2 # u0
    n = 0
    while 10**(-2**(n-2)) >= epsilon
        u = 1/2*(u+2/u)
        n = n+1
    return u
```

Exercice 2

On s'intéresse à la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$, et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}.$$

On cherche dans un premier temps à donner la limite de la suite (u_n).

1. **Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.**

   On a $u_1 = \sqrt{u_0}$ par définition ; puis pour $n \geqslant 1$, on a $u_{n+1} = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) + u_n} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$.

2. **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$; en déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**

   On montre par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$: « $u_n > 0$ » sans difficulté particulière.
   Ensuite comme $u_n > 0$, $u_n^2 + u_n > u_n$, et par stricte croissance de la racine carrée, $\sqrt{u_n^2 + u_n} > \sqrt{u_n^2}$ ce qui donne $u_{n+1} > u_n$.

3. **Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.**

   (u_n) étant croissante, il y a deux possibilités : soit elle est majorée et donc convergente; soit elle n'est pas majorée et tend vers $+\infty$. Si elle converge, sa limite ℓ est strictement positive (suite strictement croissante de termes strictement positifs) et, par continuité de f, vérifie $f(\ell) = \ell$. C'est absurde, le seul point fixe positif de f étant 0. On a donc bien $u_n \to +\infty$.

On cherche maintenant à donner divers équivalents à l'infini.

4. **Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = u_n\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{u_n}} - 1\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n)$.**

   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n = u_n\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{u_n}} - 1\right)$.

   Comme $u_n \to +\infty$ on a $\dfrac{1}{u_n} \to 0$ et on a donc par formule de cours :

   $$u_n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} - 1\right) = u_n\left(\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{1/2} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \times \frac{1}{2}\frac{1}{u_n} = \frac{1}{2}$$

   et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \dfrac{1}{2}$.

On admet ici le résultat suivant :

> **Soit** (x_n) **une suite réelle, telle que** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}^*$. **Alors si on pose** $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k$**, on a :** $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ell$.

5. **Montrer que :** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$.

   On applique le résultat à la suite $x_n = u_{n+1} - u_n$. On a $\ell = \frac{1}{2}$ d'après la question précédente ; et le résultat s'écrit alors
$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$$
   Soit par téléscopage :
$$u_n - u_0 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$$
   Attention ici à ne pas sommer les équivalents.
   On peut remarquer que comme $u_n \to +\infty$ et u_0 est constant, on a en fait $u_n - u_0 \sim u_n$; en effet une étude du quotient donne rapidement $\frac{u_n - u_0}{u_n} = 1 - \frac{u_0}{u_n} \to 1$.
   Donc $u_n - u_0 \sim u_n$. De ceci et de : $u_n - u_0 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$ on conclut par transitivité :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$$

On pose alors : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \frac{n}{2}$.

6. **En admettant l'équivalent suivant :**

> **Si** (x_n) **est une suite réelle telle que** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$**, alors :** $\sqrt{1+x_n} - 1 - \frac{1}{2}x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{8}x_n^2$.

   montrer que : $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{4n}$.

   On trouve que $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n - \frac{1}{2}$; et on factorise par u_n pour obtenir
$$v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n - \frac{1}{2} = u_n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} - 1 - \frac{1}{2u_n}\right)$$
   Le second membre du produit relève de la formule admise avec $x_n = \frac{1}{u_n} \to 0$. On obtient
$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \times \left(-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{u_n}\right)^2\right) = -\frac{1}{8u_n}$$
   Mais $u_n \sim \frac{n}{2}$, et donc $-\frac{1}{8u_n} \sim -\frac{1}{8} \times \frac{2}{n} = -\frac{1}{4n}$ par opérations sur les équivalents. On obtient bien le résultat demandé.

Dans les deux exercices suivants, on utilisera le résultat déjà vu en TD et en DS :

Soient E un ev, F et G deux sev de E tels que $F \cap G = \{0_E\}$**, et** $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$**.** **Si** $(e_1, ..., e_p)$ **et** $(f_1, ..., f_q)$ **sont des bases respectives de F et G, alors** $(e_1, ..., e_p, f_1, ..., f_q)$ **est une base de E.**

Exercice 3 (Théorème du rang)

On considère ici une application linéaire de E (ev de dimension p) dans F (ev de dimension n) ; et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
On note $r = \mathrm{rg}(f)$.

1. **Soit $\mathscr{B} = (x_1, \ldots, x_p)$ une base de E. Donner une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$; en déduire que $r \leqslant \dim(E)$.**

   On sait que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(x_1), \ldots, f(x_p)\big)$.
   La famille $\big(f(x_1), \ldots, f(x_p)\big)$ est donc génératrice de $\mathrm{Im}(f)$; comme elle comporte p vecteurs, on a $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant p$; donc $r \leqslant \dim(E)$.

Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. Il existe donc, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $e_i \in E$ tel que $f(e_i) = \varepsilon_i$.

2. **Montrer que $(e_1, \ldots, e_r)$ est libre.**

   Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$.
   On prend l'image par f ; par linéarité, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = f(0_E)$$
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F$$
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i = 0_F$$

   Or la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ est libre (c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$) ; donc tous les λ_i sont nuls.
   On a bien montré que $(e_1, \ldots, e_r)$ est libre.

3. **Montrer que** $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$**.**

   Soit un vecteur $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r) \cap \mathrm{Ker}(f)$.

   - Comme $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$, on peut écrire x sous la forme : $x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i$, où les α_i sont des réels ;
   - Comme $x \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $f(x) = 0_F$.

   Il vient alors
$$f\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i\right) = 0_F = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(e_i) \quad \text{par linéarité de } f$$

   et par le même argument que précédemment, les α_i sont nuls ; donc x est nul.
   On a donc $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r) \cap \mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$. Comme d'autre part 0_E appartient à $\mathrm{Ker}(f)$ et à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$ (ce sont des sev), on peut conclure que

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$$

4. **En déduire que, si $(u_1, \ldots, u_k)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, la famille $(e_1, \ldots, e_r, u_1, \ldots, u_k)$ est libre.**

   On considère cette fois des $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_k$ tels que

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i = 0_E$$

On peut alors écrire

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i = -\sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i$$

et si on appelle $x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i$, on a $x \in \mathrm{Vect}(e_i)$; mais aussi $x \in \mathrm{Vect}(u_i) = \mathrm{Ker}(f)$; et donc $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r) \cap \mathrm{Ker}(f)$.
D'après la question précédente, on en conclut $x = 0_{\mathrm{E}}$.

En reprenant les calculs précédents, on a montré que

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i = 0_{\mathrm{E}} \quad \text{et} \quad -\sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i = 0_{\mathrm{E}}$$

et par liberté des (e_i) (respectivement : des (u_i)), on en déduit que les α_i sont nuls (respectivement : les β_i).
Comme tous les coefficients introduits sont nuls, la famille $(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$ est libre.

On va maintenant chercher à montrer que cette famille est génératrice de E.

5. **Soit** $x \in \mathrm{E}$**. Montrer qu'il existe des réels** $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ **tels que**

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \varepsilon_i$$

Par définition, $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$; comme $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$, $f(x)$ peut se décomposer sur cette base.
Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ tels que $f(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \varepsilon_i$.

6. **Montrer alors que :** $x - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}(f)$ **; puis finalement que**

$$x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$$

On calcule :

$$\begin{aligned} f\left(x - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i\right) &= f(x) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(e_i) \quad \text{par linéarité de } f \\ &= f(x) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \varepsilon_i \\ &= 0_{\mathrm{F}} \end{aligned}$$

et on a bien $x - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}(f)$.
Comme $(u_1, \dots, u_k)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, notre vecteur ci-dessus peut se décomposer sur cette base : il existe donc $\mu_1, \dots, \mu_k$ tels que

$$x - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i$$

ce qui donne

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$$

On peut maintenant conclure.

7. **Montrer que** $(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$ **est une base de E.**

La question 4 montre que la famille $(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$ est libre ; de plus, d'après la question 6, tout vecteur de E appartient à $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$, et cette dernière famille est donc génératrice de E.
$(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)$ est donc bien une base de E.

8. **En déduire le théorème du rang.**

   On a donc $\dim(E) = \text{Card}\big((e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_k)\big) = r + k$.
   Par définition, $r = \text{rg}(f)$; et $(u_1, \dots, u_k)$ étant une base de $\text{Ker}(f)$, $\dim(\text{Ker}(f)) = k$.

   On a donc bien $\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$.

Exercice 4 (Projecteurs : facultatif)

On introduit ici les projecteurs. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1. *On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur ssi $f^2 = f$.*

On va voir que ceci conduit à beaucoup de propriétés intéressantes. Soit donc f un projecteur de E.

1. **Soit $x \in E$. Montrer que $x - f(x) \in \text{Ker}(f)$.**

   Par linéarité de f : $\forall x \in E$, $f\big(x - f(x)\big) = f(x) - (f \circ f)(x) = f(x) - f(x) = 0_E$ et on a donc $x - f(x) \in \text{Ker}(f)$.

2. **En déduire que tout élément $x \in E$ peut s'écrire $x = x_K + x_I$, où $x_K \in \text{Ker}(f)$ et $x_I \in \text{Im}(f)$.**

   On peut penser à poser x_K de la forme donnée par la question précédente.
   Écrivons $x = \big(x - f(x)\big) + f(x)$: alors $x_K = x - f(x) \in \text{Ker}(f)$; $x_I = f(x) \in \text{Im}(f)$, et $x = x_K + x_I$.

3. **Montrer que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.**

   Soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. On a $f(x) = 0$; et l'existence de $y \in E$ tel que $x = f(y)$. En combinant ces deux informations il vient $f(f(y)) = 0$, donc $f^2(y) = 0$.
   Or $f^2 = f$: on trouve finalement $f(y) = 0$ puis $x = 0$.
   Donc $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \subset \{0\}$· Mais par ailleurs $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des sev de E donc contiennent 0 ; on trouve donc bien l'égalité
   $$\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$$

4. **Montrer que $\text{Im}(f)$ est exactement l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) = x$. En déduire l'existence d'une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\text{Mat}(f, \mathscr{B})$ soit diagonale, avec r « 1 » puis $n - r$ « 0 » sur la diagonale.**

   Il s'agit de montrer :
   $$\text{Im}(f) = \{x \in E \,|\, f(x) = x\}$$

   - Si $x \in \text{Im}(f)$ on a l'existence de y tel que $x = f(y)$; et alors $f(x) = f^2(y) = f(y) = x$ d'où $\text{Im}(f) \subset \{x \in E \,|\, f(x) = x\}$
   - Si x vérifie $x = f(x)$ on a évidemment $x \in \text{Im}(f)$; d'où $\text{Im}(f) \supset \{x \in E \,|\, f(x) = x\}$

   On a donc bien l'égalité.
   On utilise alors le résultat admis : $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ et par théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$.
   En notant $r = \text{rg}(f)$, $(e_1, ..., e_r)$ une base de $\text{Im}(f)$ et $(e_{r+1}, ..., e_n)$ une base de $\text{Ker}(f)$, $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E.
   D'après la question précédente, $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $e_i \in \text{Im}(f)$ donc $f(e_i) = e_i$; et $\forall i \in [\![r + 1 n,,]\!]$ $e_i \in \text{Ker}(f)$ donc $f(e_i) = 0$.
   La matrice de f dans cette base est de la forme voulue.

5. **Soit** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.**

   (a) **Montrer que f est un projecteur. Donner des bases de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.**
   On vérifie que $A^2 = A$; d'où $f^2 = f$ et f est bien un projecteur.

   (b) **Donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale, de coefficients diagonaux égaux à 0 ou 1.**
   D'après ce qui a été fait il suffit de concaténer une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.
   La matrice fournit : $f((x, y, z)) = (y + z, x - z, -x + y + 2z)$ d'où on tire $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, -1, 1))$; par théorème du rang $\text{rg}(f) = 2$ et on peut utiliser les deux premières colonnes de A (non colinéaires)

pour affirmer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((0,1,-1),(1,0,1)\big)$.
Les questions précédentes montrent alors que

$$\mathscr{B} = \big((0,1,-1),(1,0,1),(1,-1,1)\big)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$; et que

$$\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$