TD4
Séries numériques

Exercice 1. **(*)** Donner la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2+n+1} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{3}{4^n} \qquad \sum_{k\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{2}{k^{2/3}}\right) \qquad \sum_{j\geqslant 0} e^{-2j+1} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n}\right)$$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^{2n}}{(n-1)!} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n}\, e^{-n} \qquad \sum_{i\geqslant 0} \frac{2i}{\left(i\sqrt{i}+1\right)\left(3-\sqrt{i}\right)} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n}$$

Exercice 2. **(*)** Justifier l'existence des sommes suivantes, et donner leur valeur.
Indications : pour S_2*, on fera apparaître* $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ *et* $\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$ *; pour* S_5*, on cherchera* a *et* b *tels que :* $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}$ *; et pour* S_6*,* c *et* d *tels que* $n^2 = c\,n + d\,n(n-1)$*.*

$$\mathrm{S}_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n} \qquad \mathrm{S}_2 = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \qquad \mathrm{S}_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{n-2}}{n!} \qquad \mathrm{S}_4 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$\mathrm{S}_5 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \mathrm{S}_6 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n} \qquad \mathrm{S}_7 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{(n+1)!} \qquad \mathrm{S}_8 = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 3. Soient a et b deux réels strictement positifs. Discuter suivant les valeurs de a et b la convergence de la série $\sum \frac{a^k}{1+b^k}$.

Exercice 4. **(Suite récurrente et série)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$, et : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est à termes > 0. Montrer que (u_n) converge, et donner sa limite.
2. On pose $v_n = \ln(u_n)$. Montrer : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}$.
3. En déduire que $\sum u_n$ diverge.

Exercice 5. **(Étude d'une suite par la série télescopique associée)**
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.

1. Déterminer un équivalent de $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n)$, puis $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
2. En procédant de manière similaire, montrer que $\lim_{n\to+\infty} n u_n = +\infty$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 6. Soit $\sum a_n$ une SATP convergente.

1. Soit $x \in [0,1]$. En majorant les sommes partielles de la série de terme général $a_n x^n$, montrer que cette série converge.

2. Soit $x \in [-1,0]$. Montrer de même que la série de terme général $a_n x^n$ converge (on pourra examiner sa convergence absolue).

Exercice 7. (Développement en série entière du logarithme)
On considère un réel $x \in [0,1[$.

1. Soit $t \in [0,1]$. Donner la valeur de $\sum_{k=0}^{n} (-t)^k$.

2. En intégrant cette dernière égalité entre 0 et x, montrer que : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt$

3. *On rappelle que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle* $[a,b]$ *telles que :* $\forall\, t \in [a,b],\ f(t) \leqslant g(t)$, *alors :* $\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$ *(croissance de l'intégrale).*
   En encadrant $\frac{t^{n+1}}{1+t}$ sur $[0,x]$, montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt \right) = 0$.

4. Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$ converge, et donner la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$.

Exercice 8. (Critère de d'Alembert)
Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs.

1. On suppose que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$.
   On considère r tel que $\ell < r < 1$.
   (a) Montrer qu'il existe n_0 entier tel que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ a_{n+1} \leqslant r a_n$.
   (b) Montrer : $\forall\, n \geqslant n_0,\ a_n \leqslant r^{n-n_0} a_{n_0}$. En déduire que la série $\sum a_n$ converge.
   (c) *Application :* montrer que la série exponentielle $\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^k}{k!}$ converge pour tout réel x.

2. On suppose cette fois : $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$.
   On considère r' tel que $1 < r' < \ell$.
   (a) Montrer qu'il existe n_0 entier tel que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ a_{n+1} \geqslant r' a_n$.
   (b) Montrer : $\forall\, n \geqslant n_0,\ a_n \geqslant (r')^{n-n_0} a_{n_0}$. En déduire que la série $\sum a_n$ diverge.

3. On suppose enfin que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.
   En considérant des séries de Riemann, montrer qu'on ne peut pas conclure sur la nature de $\sum u_n$.

Exercice 9. (Séries semi-convergentes)
Soit $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, calculer les quantités $S_{2N+2} - S_{2N}$, $S_{2N+3} - S_{2N+1}$, $S_{2N+1} - S_{2N}$. En déduire que les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes.

2. En déduire que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

3. Montrer que, pour $n \to +\infty$, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Donner la nature de ces deux séries. Conclusion?

NB : la série étudiée est un cas particulier de *série alternée*. On montre en fait (hors-programme) :

> Soit (a_n) une suite positive, décroissante, tendant vers 0. Alors la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.

Exercice 10. (Étude du reste d'une série convergente / des sommes d'une série divergente)
On s'intéresse à la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln(n)}$. On va montrer sa divergence, puis donner un équivalent de ses sommes partielles (qui tendent donc vers $+\infty$).

1. Soit $n \geqslant 3$. Montrer l'encadrement : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leqslant \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$.
2. En déduire un encadrement de $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$; puis un équivalent de S_n.

On s'intéresse maintenant à la série de terme général $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

3. Justifier que cette série converge.
4. Soit $n \geqslant 2$. Montrer l'encadrement : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}$.
5. En déduire un encadrement du reste partiel $\mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$, puis un équivalent de R_n (on pourra commencer par encadrer $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k\sqrt{k}}$, avec $\mathrm{N} \geqslant n+1$).

Éléments de réponses

1
- $\frac{1}{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ donc cv par comparaison à une série de Riemann (on a bien des termes positifs)
- $\frac{3}{4^n} = 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ cv car série géométrique avec $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$
- $\frac{2}{k^{2/3}} \to 0$ donc $\ln\left(1+\frac{2}{k^{2/3}}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2}{k^{2/3}}$ donc dv par comparaison à Riemann ($2/3 < 1$).
- $e^{-2j+1} = e \times (e^{-2})^j$ cv car série géométrique
- $\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n}\right) = -\frac{2}{n(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{n^2}$. En passant par l'opposé (à termes positifs !) : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$ donc tg de série cv, donc $\sum\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n}\right)$ cv également
- $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^{2n}}{(n-1)!}$: on passe par la somme partielle : $\sum_{n=1}^{N} \frac{2^{2n}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2^{2n+1}}{n!}$.
  La série de tg $\frac{2^{2n+1}}{n!} = 2 \times \frac{4^n}{n!}$ converge comme série exponentielle ; celle de l'énoncé converge également.
- $n^2 \times \sqrt{n}\,e^{-n} = n^{5/2}e^{-n} \to 0$ donc $\sum \sqrt{n}e^{-n}$ cv par test de Riemann.
- $\frac{2i}{\left(i\sqrt{i}+1\right)\left(3-\sqrt{i}\right)} \underset{i\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{i}$ donc série divergente.
- Test de Riemann : $n^2 \times \frac{n^2}{2^n} = n^4 e^{-n\ln(2)} \to 0$ par croissances comparées ; donc série cv.

2
1. $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-2}\right)^n$ (donc converge, cf. exo précédent) ; $S_1 = \frac{1}{1-e^{-2}}$.
2. La série définissant S_2 est géométrique de raison $1/2$.
   $S_2 = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+3}} = (1/2)^3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{(1/2)^3}{1-1/2}$.
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{n-2}}{n!} = -\frac{1}{2^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = -\frac{e^{-2}}{4}$
4. $S_4 = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-(1/2)^2}$
5. $S_5 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
6. $S_6 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n}$
7. $S_7 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{(n+1)!}$
8. $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

3 Si $b<1$, $b^k \to 0$ et donc $1+b^k \to 1$, donc ~ 1.
Dans ce cas $\frac{a^k}{1+b^k} \sim a^k$, et la série converge ssi $a<1$.
Si $b=1$, $\frac{a^k}{1+b^k} = \frac{a^k}{2}$ et on a le même résultat.
Si $b>1$, on a $\frac{a^k}{1+b^k} \sim \left(\frac{a}{b}\right)^k$, donc il y a convergence ssi $a<b$.

4
1. Par récurrence sur n : $u_0>0$; et si $u_n>0$ alors $u_{n+1} = u_n e^{u_n} > 0$.
   On a alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$: (u_n) décroît.
   Décroissante et minorée par 0, elle converge. Th point fixe : sa limite vérifie $\ell = \ell e^{-\ell}$ soit $\ell(1-e^{-\ell}) = 0$ ce qui donne $\ell = 0$
2. $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - u_n = v_n - u_n$. Donc $u_n = v_n - v_{n+1}$, et par téléscopage
   $$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}$$
3. On s'intéresse à $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \lim(v_0 - v_{n+1})$.
   $u_n \to 0$ donc $v_n = \ln(u_n) \to -\infty$ et donc $\sum_{k=0}^{n} u_k \to -\infty$: $\sum u_n$ diverge.

5
1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2}$ donc $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{2n+2}\right) \sim -\frac{1}{2n+2} \sim -\frac{1}{2n}$ (avec $-\frac{1}{2n+2} \to 0$).
   La série des $-\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge car son terme général équivaut à $\frac{1}{2n}$ (série de Riemann divergente) et on compare des SATP.
   Donc la série de TG $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge également.

Comme cette série est à termes négatifs, la suite des sommes partielles décroît et diverge, donc $\to -\infty$.
Or par téléscopage

$$\sum_{n=0}^{N} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \sum_{n=0}^{N} (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) = \ln(u_{N+1}) - \ln(u_0)$$

et donc $\ln(u_{N+1}) \to -\infty$ ce qui donne $\lim\limits_{N\to+\infty} u_N = 0$.

2. Avec $v_n = nu_n$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{n+1}{n}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{n}\dfrac{2n+1}{2n+2} = \dfrac{2n+1}{2n}$ et on trouve par des calculs similaires

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \sim \frac{1}{2n}$$

Par comparaison à Riemann la série de TG $\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ diverge ; cette fois ces sommes partielles tendent vers $+\infty$ donc $\ln(v_n) \to +\infty$ et $v_n \to +\infty$.
On a alors l'existence de n_0 tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow nu_n \geqslant 1$; ce qui donne alors $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$ et la divergence de $\sum u_n$ par comparaison à la série harmonique.

6 1. Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, la série $\sum a_n x^n$ est à termes positifs, et on a

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant x^n \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant a_n x^n \leqslant a_n$$

$\sum a_n$ converge donc $\sum a_n x^n$ converge par comparaison de SATP.
NB : on n'est pas obligés de passer par les sommes partielles ! si on veut le faire on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{N} a_n \leqslant S$$

où $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ existe par hypothèse ; les sommes partielles de la SATP $\sum a_n x^n$ sont majorées donc cette série converge.

2. Si $x \in [-1, 0]$, alors $|x| \in [0, 1]$ et avec $a_n \geqslant 0$ on a $|a_n x^n| = a_n |x|^n$. Le même raisonnement montre que $\sum |a_n x^n|$ converge, donc $\sum a_n x^n$ converge absolument, donc converge.

7 1. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-t)^k = \dfrac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$ somme géom FINIE de raison $-t \neq 1$.

2. $\displaystyle\int_0^x (-t)^k \,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$, et

$$\int_0^x \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ldots$$

avec des primitives usuelles.

3. Pour $t \in [0, 1]$ on a $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ donc $\dfrac{t^{n+1}}{2} \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{1+t} \leqslant t^{n+1}$ et en intégrant sur $[0, x]$

$$\frac{x^{n+2}}{2(n+1)} \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

on conclut en appelant les gendarmes.

4. On a vu

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) + \underbrace{(-1)^n \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t}_{\to 0 \text{ pour } n\to+\infty}$$

Les sommes partielles de la série $\sum (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ ont donc une limite finie : cette série converge et sa somme vaut $\ln(1+x)$.

8 1. (a) $r > \ell$ donc il existe n_0 tel que : $\forall\, n \geqslant n_0$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant r$.

(b) Récurrence puis comparaison à une série convergente

(c) $a_k = \dfrac{x^k}{k!}$ donc un calcul simple donne $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$; on devrait se trouver dans le cas de figure de cette question...

2. (a) Comme en 1a avec $r' < \ell$.

(b) Récurrence puis comparaison à une série divergente.

3.

9 1. $S_{2N+2} - S_{2N} = \dfrac{1}{\sqrt{2N+2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2N+1}}$, et ça marche de manière similaire pour les autres. On en déduit que (S_{2N}) est décroissante, (S_{2N+1}) est croissante, et que la différence de ces deux suites tend vers 0.

2. Les suites de la question 1 sont adjacentes donc tendent vers la même limite S. Comme $S_{2N} \to S$ et $S_{2N+1} \to S$ on en déduit que $S_N \to S$: les sommes partielles de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ont une limite finie, donc cette série converge.

3. L'étude du quotient donne l'équivalence.
Comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on en déduit que $\sum(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n})$ diverge (convergente + divergente) et que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge : deux séries de terme général équivalent n'ont pas forcément la même nature ! (car ici ce ne sont pas des SATP)

10 1. La fonction $t \mapsto t\ln(t)$ est croissante donc son inverse $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ est décroissante.

On en déduit : $\forall\, t \in [n, n+1],\ \dfrac{1}{t\ln(t)} \leqslant \dfrac{1}{n\ln(n)}$; et $\forall\, t \in [n-1, n],\ \dfrac{1}{t\ln(t)} \geqslant \dfrac{1}{n\ln(n)}$ puis les deux inégalités voulues par intégration sur les intervalles respectifs.

2. En sommant :

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\int_{k}^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}\right) \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \sum_{k=2}^{n}\left(\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}\right)$$

et on a par Chasles

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\int_{k}^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}\right) = \int_{2}^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$$

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}\right) = \int_{1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$$

Ces deux intégrales se calculent en remarquant que $\dfrac{1}{t\ln(t)} = \dfrac{1/t}{\ln(t)}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$; on trouve l'équivalent $\mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$

3. Riemann
4. Idem...
5.

$$\sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}}\left(\int_{k}^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{k\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}}\left(\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}\right)$$

$$\int_{n+1}^{\mathrm{N}+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{k\sqrt{k}} \leqslant \int_{n}^{\mathrm{N}}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}$$

et avec une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{t}} = t^{-3/2}$ qui est $t \mapsto \dfrac{t^{-1/2}}{-1/2} = -\dfrac{2}{\sqrt{t}}$

$$\frac{2}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{\mathrm{N}+1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{k\sqrt{k}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{\mathrm{N}+1}}$$

En passant à la limite $\mathrm{N} \to +\infty$ on trouvera un encadrement qui donnera facilement $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{n}}$