TD3bis
D'autres suites implicites

Exercice 1. Pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = e^x + nx^2 - 3$.

1. (a) Dresser le tableau de variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Donner l'équation de la tangente de f_n au point d'abscisse 1.
   (c) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement une solution positive, notée u_n.
   (d) Préciser la valeur de u_0.Dans la suite en supposera que $n \geqslant 1$.
   (e) Vérifier : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in]0,1[$.
2. Compléter le code suivant, qui donne une valeur approchée de u_n à 0.001 près à l'aide d'une dichotomie.

```
import numpy as np
def f(n,x):
    return np.exp(x)+n*x**2-3

def dicho(n):
    a=0
    b=1
    while .... :
        if f(n,(a+b)/2)>0:
            ...
        else:
            ...
    return ...
```

3. (a) Montrer : $\forall\, x \in]0,1[,\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$.
   (b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis le sens de variation de la suite (u_n).
   (c) Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   (d) On suppose ici que $\ell > 0$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{u_n} + nu_n^2 - 3$ et en déduire une contradiction. Conclure alors sur la valeur de ℓ.
   (e) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n^2$ et en déduire un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto x^3 + nx$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution réelle, que l'on notera u_n.
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n < \dfrac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. Calculer $f_{n+1}(u_n)$. En déduire le sens de variation de (u_n).
4. À l'aide de l'équation vérifiée par u_n, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$. En déduire un équivalent de u_n.
5. On pose $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ nv_n = -u_n^3$; en déduire un équivalent de v_n.