DS n°2

21/10/2023
Durée : 4h

Exercice 1 (une suite récurrente)

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

Partie I : Étude de la fonction g

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h(x) = \ln(x) + 2x - 1$$

   (a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$. Justifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

   (c) Démontrer que : $\forall x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{x^2} h(x) g(x)$.

   (d) En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$$

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n > 0$.
4. Écrire une fonction Python qui prend en argument un réel u_0 et un entier n et renvoie la liste des $n+1$ premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0.
5. (a) Étudier le signe de $(x-1)\ln(x)$ pour $x > 0$.

   (b) Montrer que : $\forall x > 0$, $\frac{g(x)}{x} \geqslant 1$.

   (c) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \geqslant x$, et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.
6. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

   (a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.
8. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 > 1$.

   (a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
9. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $0 < u_0 < \frac{1}{2}$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 2 (deux suites implicites)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse dans cet exercice aux solutions positives de l'équation $e^x = x^n$, d'inconnue x. On pose la fonction f_n telle que : $\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}$.

1. Montrer, pour $x \geqslant 0$: $e^x = x^n \Leftrightarrow f_n(x) = 0$.

2. **Étude de f_n.**

   (a) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) Si $n \leqslant 2$, combien de solutions admet l'équation proposée ?

   (c) Donner un aperçu de la représentation graphique de f_3. On donne la valeur approchée : $\left(\dfrac{3}{e}\right)^3 \simeq 1,34$.

Dans tout ce qui suit, n est un entier supérieur ou égal à 3.

3. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions positives u_n et v_n, avec $u_n < n < v_n$.
   On pourra appliquer deux fois le théorème de la bijection sur des intervalles bien choisis.

4. **Convergence de (u_n).**

   (a) Montrer que : $1 < u_n < e$.

   (b) Montrer que $f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n$, et en déduire la monotonie de (u_n).

   (c) Montrer que la suite (u_n) converge, et donner un encadrement de sa limite, notée ℓ.

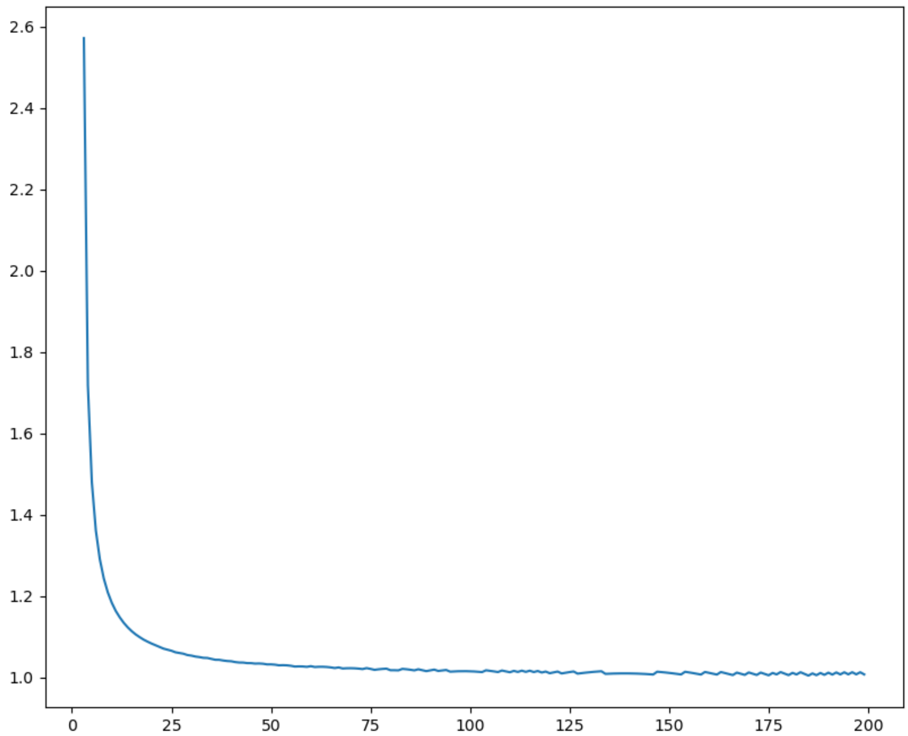
   (d) On suppose $\ell > 1$. En utilisant que $(u_n)^n = e^{u_n}$ conclure à une absurdité. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$?

5. **Équivalent de $(u_n - \ell)$.**

   (a) On suppose qu'on a programmé une fonction Python d'en-tête `def u(n)` qui renvoie, pour un entier $n \geqslant 3$ passé en argument, une valeur approchée de u_n.
   On exécute alors le script suivant :

```python
import matplotlib.pyplot as plt
L=[]
for n in range(3,200):
    L.append(n*(u(n)-1))
plt.plot(range(3,200),L)
plt.show()
```

   On obtient le tracé suivant :



Qu'a-t-on tracé ? Déduire de cette figure une conjecture sur un équivalent de $u_n - 1$.

(b) On pose $\alpha_n = u_n - 1$: on a donc $u_n = 1 + \alpha_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.
En utilisant que u_n est une solution de $e^x = x^n$, montrer que $n\ln(1+\alpha_n) = u_n$; en déduire un équivalent de α_n.

6. **Étude de (v_n).**

   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

   (b) Montrer que $v_n = n\ln(v_n)$, puis en déduire que $v_n > n\ln(n)$. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{n}$?

   (c) Montrer que $\dfrac{v_n}{n} - \ln\left(\dfrac{v_n}{n}\right) = \ln(n)$; en déduire que $\dfrac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, puis un équivalent de v_n.

Exercice 3

Dans tout le problème, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'entiers naturels.

   (b) Montrer que (u_n) est strictement croissante à partir du rang 2.

   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Dans toute la suite du problème, a et b (avec $a > b$) désignent les deux solutions de l'équation du second degré suivante : $x^2 - x - 1 = 0$.

2. (a) Calculer a et b. Montrer que : $b = 1 - a = -\dfrac{1}{a}$. Établir les encadrements suivants : $1 < a < 2$; $-1 < b < 0$.

   (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$.

   (c) En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Montrer : $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{2^n} = 0$.

4. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{u_n}{2^n} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^k}\right)$.

5. Pour $N \geqslant 1$, on note $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.

   (a) Montrer : $\forall N \geqslant 1, S_N = 4S_{N+2} - 2S_{N+1} - 1$.
   On pourra utiliser la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).

   (b) **Pour les cubes :** montrer que $S = \lim_{N \to +\infty} S_N$ existe (pour les carrés, on l'admet).

   (c) Donner la valeur de S.

6. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\beta_n = u_{n+1} - au_n$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = b^n$.

7. On rappelle que pour tout réel x, la partie entière de x est l'entier noté $\lfloor x \rfloor$ qui vérifie : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

   (a) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante : $\lfloor au_{2n} \rfloor = u_{2n+1} - 1$.
   On pourra utiliser la définition de β_n.

   (b) Exprimer pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $\lfloor au_{2n-1} \rfloor$ en fonction de u_{2n}.