DS 2

Corrigé.

Exercice 1

$g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{\left(2 - \frac{1}{x}\right)}_{\to -\infty} \underbrace{\ln(x)}_{\to -\infty} = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty.}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\left(2 - \frac{1}{x}\right)}_{\to 2} \underbrace{\ln(x)}_{\to +\infty} = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$

2 (a) $\forall x > 0$, $h(x) = \ln(x) + 2x - 1$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables ;

on a alors : $\forall x > 0$, $\underline{h'(x) = \frac{1}{x} + 2}$

On voit clairement : $\forall x > 0$, $\underline{h'(x) > 0}$

d'où : $\boxed{h \text{ est strict}^t \text{ croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$

2 (b) On a sans formes indéterminées :

$\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

On a déduit le tableau de variations de h sur $\mathbb{R}_+^*$: (2)

x	0	$+\infty$
$h(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

h est continue, strict^t $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc réalise 1 bijec$^\circ$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

$0 \in \mathbb{R}$: $\underline{\exists!\ \alpha \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } h(\alpha) = 0}$

Avec $h(1/2) = -\ln(2) < 0$
$h(1) = 1 > 0$

On peut écrire $h(1/2) < h(\alpha) < h(1)$

$\Rightarrow \boxed{1/2 < \alpha < 1}$

par applicat$^\circ$ de h^{-1}, strictem^t croissante sur $\mathbb{R}$

2c. On dérive g comme une composée de fonctions :

$$\forall x > 0,\ g'(x) = \left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \times \ln(x)\right) \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

$$= \frac{2x - 1 + \ln(x)}{x^2}\, g(x)$$

et on a bien : $\boxed{\forall x > 0,\ g'(x) = \frac{1}{x^2}\, g(x)\, h(x)}$

2d. $\forall x > 0$, $x^2 > 0$ et $g(x) > 0$ (c'est une exponentielle)

donc le signe de g' est celui de h.

On reprend le tableau de h :

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$	$\|\|$ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
signe de h	$\|\|$	$-$	0	$+$	

et on voit : $\forall x \in]0,\alpha[,\ h(x)<0$
$\forall x \in]\alpha,+\infty[,\ h(x)>0$

d'où le tableau de g :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|\|$ $+\infty$	↘	$g(\alpha)$	↗	$+\infty$

avec les limites trouvées en question 1

Partie II

3. Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "u_n existe, et $u_n>0$"

$*$ $u_0>0$ (et donc il existe !) d'après l'énoncé : $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$*$ Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé, on suppose $u_n>0$

g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $u_{n+1}=g(u_n)$ existe bien ;

et $\forall x>0,\ g(x)>0$: donc $\underline{u_{n+1}>0}$

La propriété est donc établie par récurrence.

4. On peut écrire :

```python
def suite(u0, n):
    L = [u0]
    u = u0
    for k in range(n):
        u = np.exp((2 - 1/u) * np.log(u))
        L.append(u)
    return L.
```

5a. Par signe d'un produit :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	||	$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	||	$-$	0	$+$	
$(x-1)\ln(x)$	||	$+$	0	$+$	

d'où $\underline{\forall x > 0,\ (x-1)\ln(x) \geq 0}$

(et même $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $(x-1)\ln(x) > 0$)

5b. On calcule $\dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{1}{x} \exp\left(\left(2 - \dfrac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$

$$= \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) - \ln(x)\right)$$

$$= \exp\left(\left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

$$\underline{\underline{\frac{g(x)}{x} = \exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right)}}$$

Et d'après 5a : $\forall x > 0,\ \dfrac{(x-1)\ln(x)}{x} \geq 0$: $\boxed{\forall x > 0,\ \dfrac{g(x)}{x} \geq 1}$

5c. On tire immédiatᵗ de 5b, en multipliant par $x \geq 0$:

$\forall x \geq 0 \ , \ g(x) \geq x.$

De plus : $g(x) = x \iff \frac{g(x)}{x} = 1$

$$\iff \exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right) = 1$$

$$\iff \frac{(x-1)\ln(x)}{x} = 0$$

$$\iff (x-1)\ln(x) = 0$$

$$\iff x = 1 \qquad (\text{cf } 5a).$$

On a bien que $\boxed{1 \text{ est l'unique solut° sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de } g(x) = x}$

6. D'après 3°) : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n > 0$

et donc d'après 5c : $\forall n \in \mathbb{N}, \ g(u_n) \geq u_n$

$$\iff u_{n+1} \geq u_n$$

Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$

7. a. Par récurrence : $\mathcal{P}(n)$: " $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ ". $\mathcal{P}(0)$ est vraie d'après l'énoncé.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

Il faut encadrer $g(u_n)$. On reprend le tableau de variation de g :

x	0	$1/2$	α	1	$+\infty$
	$\|\| +\infty$	1 ↘	$g(\alpha)$	↗ 1	$+\infty$

($g(1/2) = g(1) = 1$ par calcul direct.)

On voit alors : $\forall x \in [1/2, 1],\ g(x) \in [g(\alpha), 1]$ ....

mais que dire de $g(\alpha)$!

On se souvient alors que : $\forall x > 0,\quad g(x) \geqslant x$

de sorte que $g(\alpha) \geqslant \alpha > 1/2$

Final^t : $\quad 1/2 \leq u_n \leq 1 \quad \Rightarrow \quad g(\alpha) \leq g(u_n) \leq 1$

$\Rightarrow \quad 1/2 < \alpha \leq g(\alpha) \leq u_{n+1} \leq 1$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$ et on a bien l'hérédité.

On a montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1/2, 1]}$

7b. Dans ce cas, (u_n) est croissante, majorée par 1, donc converge vers $l \in [1/2, 1]$.
g étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème du point fixe donne $g(l) = l$, dont on a vu que la seule solut° est $l = 1$ (cf 5c)

Ainsi : $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 1}$

8a

On reprend le tableau de g : sa stricte croissance sur $]1, +\infty[$ montre que : $\forall x > 1,\ g(x) > 1$. On a $u_0 > 1$;

par une récurrence similaire à celle de 7a on en déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1.}$$

8b Si (u_n) converge, c'est vers un point fixe de g, donc vers 1. Or $u_0 > 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît : c'est impossible.

(u_n) est croissante et diverge, donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

9. Si $u_0 \in]0, \frac{1}{2}[$, une lecture du tableau de variations de g montre que $u_1 = g(u_0) \in]1, +\infty[$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ relève donc du cas précédent : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

Exercice 2

1. $\forall x \geq 0$: $e^x = x^n \iff 1 = x^n e^{-x}$ en divisant par $e^x \neq 0$

$$\iff 1 - x^n e^{-x} = 0$$

$$\boxed{e^x = x^n \iff f_n(x) = 0}$$

2. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions dérivable.

$\forall x \geq 0$, $f_n'(x) = -n x^{n-1} e^{-x} + x^n e^{-x}$

$$\underline{f_n'(x) = x^{n-1} e^{-x} (x - n)}$$

Sur $\mathbb{R}_+$, x^{n-1} et e^{-x} sont positifs donc le signe de f_n' est celui de $x - n$.

On déduit le tableau suivant :

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	1	$\searrow$	$1 - \left(\frac{n}{e}\right)^n$	$\nearrow$	1

On a : $f_n(0) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 1$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$ (croiss. comp.)

$$f_n(n) = 1 - n^n e^{-n} = 1 - \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

2b. Si $n \leq 2$, $\frac{n}{e} < 1$ (avec $e \simeq 2,71$)

et donc $\underline{\underline{1 - \left(\frac{n}{e}\right)^n > 0}}$

On voit alors d'après le tableau que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) > 0$

ce qui montre que $\boxed{\text{l'équat° } f_n(x) = 0 \text{ n'a pas de solut° sur } \mathbb{R}_+}$

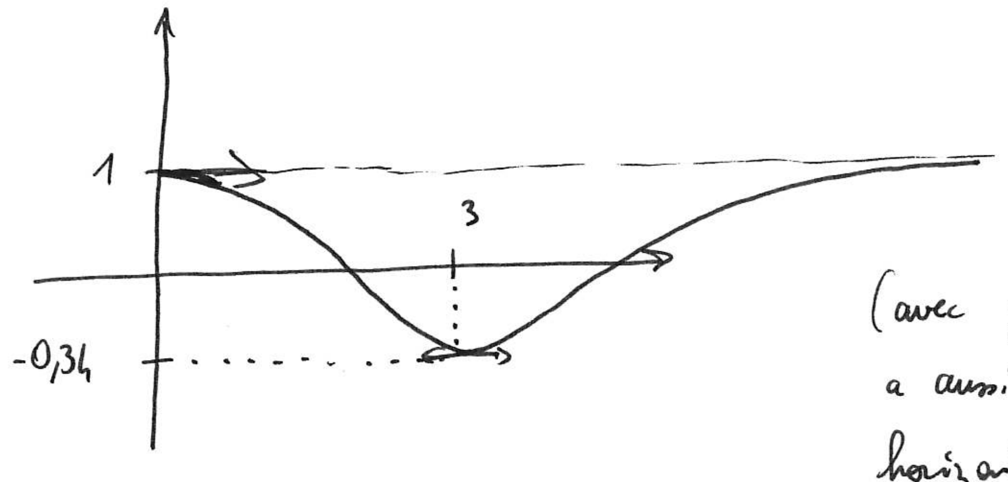
(et donc $x^n = e^x$ non plus, d'après la question 1)

2c. Pour f_3 on a le tableau

x	0		3		$+\infty$
$f_3(x)$	1	$\searrow$	$\simeq -0,34$	$\nearrow$	1

$f_3(3) = 1 - \left(\frac{3}{e}\right)^3 \simeq -0,34$

On ne demande pas trop de raffinements … on peut proposer :



(avec $f_3'(0) = 0$ on a aussi une tangente horizontale en 0)

3. Pour tout $n \geqslant 3$, $f_n(n) = 1 - \left(\frac{n}{e}\right)^n$; $\frac{n}{e} > 1$ donc cette fois $\underline{\underline{f_n(n) < 0}}$

On a donc :

* f_n continue, strict^t décroissante sur $[0, n]$

(car $f_n'(x) < 0$ sur $[0, n]$ sauf aux 2 points 0 et n, ce qui n'empêche pas la stricte $\searrow$)

f_n réalise donc une bijection de $[0, n]$ sur $[f_n(n), 1]$.

Or $0 \in [f_n(n), 1]$; donc $\exists !\, u_n \in [0, n]$ tel que $f_n(u_n) = 0$

et comme $f_n(n) \neq 0$ on a en fait $0 \leq u_n \underline{\underline{<}} n$.

* f_n continue, strict^t $\nearrow$ sur $]n, +\infty[$

donc de même : $\exists !\, v_n \in]n, +\infty[$ tel que $f_n(v_n) = 0$

On a cherché des solut° sur $[0, n]$ et sur $]n, +\infty[$, donc sur tout $\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{f_n(x) = 0 \text{ admet donc exacte}^t \text{ 2 solut° sur } \mathbb{R}_+ \text{, telles que } u_n < n < v_n}$$

4a. On calcule : $f_n(1) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} \underline{\underline{> 0}}$

$$f_n(e) = 1 - e^n e^{-e} = 1 - \exp(n - e)$$

et pour $n \geqslant 3$, $n - e > 0$ donc $1 - \exp(n-e) \underline{\underline{< 0}}$

Ainsi $f_n(e) < 0 < f_n(1)$

$\Leftrightarrow \quad f_n(e) < f_n(u_n) < f_n(1)$

et par stricte ↓ de f_n^{-1} : (sur les intervalles en jeu ici f_n est str. ↓ donc f_n^{-1} également)

$\Leftrightarrow \quad \boxed{1 < u_n < e}$

4b. $f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n^{n+1} e^{-u_n}$

On $f_n(u_n) = 0$, ce qui s'écrit aussi $e^{u_n} = u_n^n$

d'où $f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n^{n+1} u_n^{-n} = \underline{\underline{1 - u_n}}$.

Comme $u_n > 1$, $1 - u_n < 0$

et donc $\underline{f_{n+1}(u_n) < 0}$

ce qui s'écrit aussi $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$

et par str ↓ de f_{n+1}^{-1} : $u_n > u_{n+1}$

$\Rightarrow$ $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$

4c. On a vu en 4a que (u_n) est minorée par 1

(u_n) ↓ et minorée , donc (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$.

$\forall n \geq 3, \quad 1 < u_n < e$; d'où $\boxed{1 \leq l \leq e}$

4d. Supposons $l > 1$.

On a $u_n^n = e^{u_n}$, d'où $n \ln(u_n) = u_n$

Pour $n \to +\infty$, $\ln(u_n) \to \ln(l) > 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln(u_n) = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

ce qui est contradictoire car ces deux suites sont égales !!

On conclut donc $l \leq 1$; puis $\boxed{l = 1}$

5a. Le script Python proposé initialise une liste vide, et lui rajoute successivement des valeurs approchées de $3(u_3 - 1)$

$4(u_4 - 1)$

$5(u_5 - 1)$

$\vdots$

$199(u_{199} - 1)$.

On trace ensuite la courbe joignant les points de coordonnées

$(n, n(u_n - 1))$ pour $n \in [\![3, 199]\!]$.

Le tracé affiché représente donc les termes de la suite $(n(u_n - 1))_{n \geq 3}$

On peut alors conjecturer : $\lim\limits_{n \to +\infty} n(u_n - 1) = 1$

d'où on tire $n(u_n - 1) \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$ (limite non nulle)

puis $\boxed{u_n - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$

5b. On a $e^{u_n} = u_n^{\,n}$; soit en passant au ln :

$u_n = n \ln(u_n)$

$u_n = n \ln(1 + \alpha_n)$

Or $\alpha_n \to 0$: on a alors $\ln(1 + \alpha_n) \sim \alpha_n$

d'où $u_n \sim n\alpha_n$ et $\alpha_n \sim \frac{u_n}{n}$

Enfin : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ donc $u_n \sim 1$

et finalement $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

Ce qui valide bien la conjecture de 5a.

6. a. $\forall n \geqslant 3$, $v_n > n$. $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc par minoration :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$$

6b. On repart de la définition :

$$f_n(v_n) = 0 \iff 1 - v_n^n e^{-v_n} = 0$$
$$\iff v_n^n = e^{v_n}$$
$$\iff \underline{n \ln(v_n) = v_n} \text{ en passant au } \ln.$$

On $v_n > n$; donc $\underbrace{n \ln(v_n)}_{v_n} > n \ln(n)$

On a bien $\boxed{v_n > n\ln(n)}$

En divisant par n : $\forall n \geqslant 3$, $\frac{v_n}{n} > \underbrace{\ln(n)}_{\to+\infty}$ et par minorat° on

conclut ici aussi $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n} = +\infty}$

6c. $\frac{v_n}{n} - \ln\left(\frac{v_n}{n}\right)$

$= \frac{v_n}{n} - \ln(v_n) + \ln(n)$

et d'après 6b, $v_n = n\ln(v_n)$ d'où $\frac{v_n}{n} = \ln(v_n)$

ce qui donne $\frac{v_n}{n} - \ln\left(\frac{v_n}{n}\right) = \cancel{\frac{v_n}{n}} - \cancel{\ln(v_n)} + \ln(n) = \underline{\underline{\ln(n)}}$.

Ensuite c'est assez subtil (mais c'est la dernière question !!)

Avec $\frac{v_n}{n} \to +\infty$ on pressent que $\frac{v_n}{n} - \ln\left(\frac{v_n}{n}\right) \sim \frac{v_n}{n} \dots$

et en effet en passant au quotient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n/n - \ln(v_n/n)}{v_n/n} = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(v_n/n)}{v_n/n}$$

$\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ par croiss. comp, donc avec $\frac{v_n}{n} \to +\infty$ on

peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(v_n/n)}{v_n/n} = 0$

puis que $\frac{v_n}{n} - \ln\left(\frac{v_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{n}$.

Remis dans l'équat° du début de la question, on en conclut

bien que $\ln(n) = \frac{v_n}{n} - \ln\left(\frac{v_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{n}$;

puis en multipliant des deux côtés par n :

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)}$$

Exercice 3

$u_0 = 0$

$u_1 = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

1a. Par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$.

$*$ $u_1 = 1 \in \mathbb{N}^*$

$*$ $u_2 = u_1 + u_0 = 1 \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que u_n et u_{n+1} sont ds $\mathbb{N}^*$.

Alors $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \in \mathbb{N}^*$, ce qui donne l'hérédité.

Ccl : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n \in \mathbb{N}^*}$

1b. $\forall n \geq 2, \; u_{n+1} - u_n = u_{n-1}$

$n-1 \geq 1$ donc d'après 1a, $u_{n-1} \in \mathbb{N}^*$

d'où $u_{n+1} - u_n > 0$: $\boxed{(u_n)_{n \geq 2} \text{ est str. croissante}}$

1c. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, en passant à la limite dans $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

on trouve $\ell = 2\ell$; d'où $\ell = 0$.

Or $u_1 = 1$ et $(u_n)_{n \geq 2}$ str. $\nearrow$; donc on ne peut pas avoir $\ell = 0$.

Ccl : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$ (étant monotone, si (u_n) ne tend pas vers une limite réelle elle tend vers $+\infty$)

2a. Pour l'équat° $x^2 - x - 1 = 0$:

$\Delta = (-1)^2 - 4\times(-1) = 5$; d'où 2 solutions

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Comme on demande $a > b$, on a : $\boxed{a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et } b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

$$1 - a = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2-1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = b \ ;$$

$$-\frac{1}{a} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{-2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = b.$$

De $4 < 5 < 9$ on tire $2 < \sqrt{5} < 3$

puis $\frac{3}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$

ce qui implique $\boxed{1 < a < 2}$

$\Rightarrow$ on en tire aussi : $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{-1 < b < -\frac{1}{2} < 0}$

2b. Par résolut° usuelle des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :

$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha . a^n + \beta . b^n$

Pour $n = 0$: $u_0 = \alpha + \beta = 0$

$n = 1$ $u_1 = \alpha a + \beta b = 1$

On a donc $\beta = -\alpha$ et $\alpha a - \alpha b = 1$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{a-b} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

et $\beta = -\alpha = -1/\sqrt{5}$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} a^n - \frac{1}{\sqrt{5}} b^n}$$

2c. Avec $2 < \sqrt{5} < 3$

on a $-2 < 1-\sqrt{5} < -1$

puis $-1 < b < -\frac{1}{2}$: $\lim_{n\to+\infty} b^n = 0$

Avec $a > 1$, $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ donc on pressent $u_n \sim \frac{a^n}{\sqrt{5}}$.

En effet : $\frac{u_n}{a^n/\sqrt{5}} = \frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}(a^n - b^n)\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{a^n}$

$= 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n$ et $a > 1 \Rightarrow -1 < \frac{b}{a} < -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \left|\frac{b}{a}\right| < 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n = 0$

d'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{a^n/\sqrt{5}} = 1$

$\Rightarrow \boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^n}{\sqrt{5}}}$

3. On utilise l'équivalent obtenu ci-dessus.

$\frac{u_n}{2^n} \sim \frac{a^n}{2^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{a}{2}\right)^n$.

On $1 < a < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < a/2 < 1 \Rightarrow \left|\frac{a}{2}\right| < 1$

d'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{a}{2}\right)^n = 0$ et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{2^n} = 0}$

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère :

$$\frac{u_n/2^n}{1/n^k} = n^k \frac{u_n}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}} n^k \left(\frac{a}{2}\right)^n$$

$\left|\frac{a}{2}\right| < 1$ donc par croissances comparées $\lim_{n\to+\infty} n^k \left(\frac{a}{2}\right)^n = 0$.

d'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n/2^n}{1/n^k} = 0$. On conclut bien $\boxed{\frac{u_n}{2^n} = o\left(\frac{1}{n^k}\right)}$

5. $\forall N \geq 1$:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{2^{n+1}} \quad \text{avec l'indicat}^{\circ}.$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{u_{n+2}}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}}$$

(pas de souci de convergence ici, on peut découper la somme)

On effectue des changements d'indice pour retrouver la forme de S_N :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{u_{n+2}}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}}$$

$\downarrow k = n+2 \qquad \downarrow k = n+1$

$$= \sum_{k=3}^{N+2} \frac{u_k}{2^{k-1}} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{u_k}{2^k}$$

$$= 2^2 \sum_{k=3}^{N+2} \frac{u_k}{2^{k+1}} - 2 \sum_{k=2}^{N+1} \frac{u_k}{2^{k+1}}$$

et il reste à "compenser" les premiers termes manquants.

$$= 4\left(S_{N+2} - \underbrace{\frac{u_1}{4}}_{k=1} - \underbrace{\frac{u_2}{8}}_{k=2}\right) - 2\left(S_{N+1} - \underbrace{\frac{u_1}{4}}_{k=1}\right) \quad [u_1 = 1, u_2 = 2]$$

$$= 4\left(S_{N+2} - \frac{1}{4} - \frac{2}{8}\right) - 2\left(S_{N+1} - \frac{1}{4}\right) = \underline{4 S_{N+2} - 2 S_{N+1} - 1}$$

5b. Il s'agit d'établir la convergence de $\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$

Or $u_n \sim \frac{a^n}{\sqrt{5}}$, donc $\frac{u_n}{2^{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{5}\times 2}\left(\frac{a}{2}\right)^n$

et $\left|\frac{a}{2}\right| < 1$: $\sum \left(\frac{a}{2}\right)^n$ cv donc par comparaison de SATP

$$\boxed{\sum \frac{u_n}{2^{n+1}} \text{ cv}}$$

On passe à la limite dans 5a : pour $N \to +\infty$, on trouve :

$S = 4S - 2S - 1$ ce qui donne $\boxed{S = 1}$

6. Avec la formule explicite de 2b :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - a u_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{\sqrt{5}} - \frac{a(a^n - b^n)}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{-b^{n+1} + a b^n}{\sqrt{5}}$$

$$= b^n \frac{a-b}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{b^n}} \quad \text{car } a - b = \sqrt{5}$$

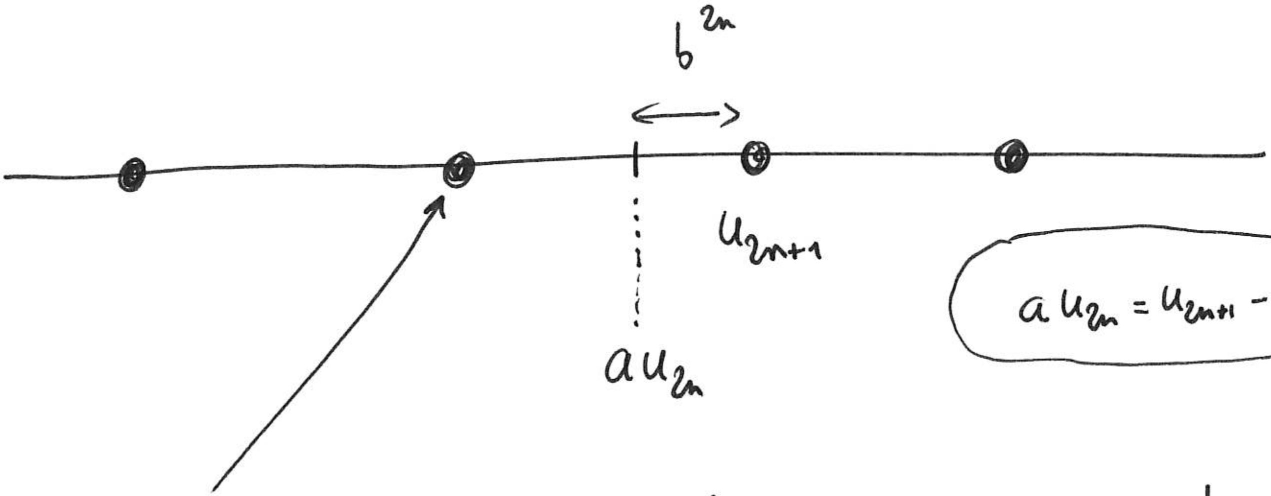
7a. En reprenant la défin° de β_n on peut écrire :

$$a\, u_{2n} = u_{2n+1} - \beta_{2n} = u_{2n+1} - b^{2n}$$

Or $b \in]-1, 0[\Rightarrow b^{2n} \in]0, 1[$

Et u_{2n+1} est entier ; on peut tracer le schéma suivant

(les • sont les entiers)



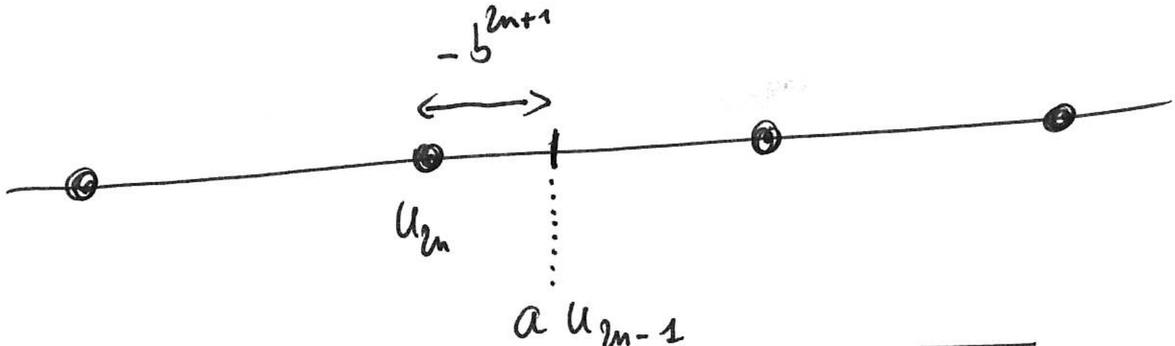
$a u_{2n} = u_{2n+1} - b^{2n}$

ici on a l'entier immédiatement inférieur à $a u_{2n}$, c'est $\lfloor a u_{2n} \rfloor$

et on observe $\boxed{\lfloor a u_{2n} \rfloor = u_{2n+1} - 1}$

7b. De même

$$a u_{2n-1} = \underset{\text{entier}}{u_{2n}} - b^{2n+1}$$ et cette fois $b^{2n+1} \in]-1, 0[$



et de même : $\boxed{\lfloor a u_{2n-1} \rfloor = u_{2n}}$