Variables aléatoires discrètes

Exercices

Rappels de première année

Exercice 1. (Tirages successifs)
Une urne n°1 contient 2 boules blanches et 4 boules rouges. Une urne n°2 contient 1 boule blanche et 1 boule rouge. On tire au hasard une boule de l'urne n°1, et on la place dans l'urne n°2. Puis on tire au hasard une boule dans l'urne n°2. On note

- B_i l'événement : «On tire une boule blanche dans l'urne n°i».
- R_i l'événement : «On tire une boule rouge dans l'urne n°i».

Déterminer :

1. La probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche.
2. La probabilité que la boule transférée soit blanche, sachant que la deuxième boule tirée est blanche.

Exercice 2. (Marche au hasard sur une droite)
On considère un objet qui se déplace aléatoirement sur un axe. Au temps 0, il part de l'origine; à chaque unité de temps il saute d'une longueur 1 vers la gauche ou vers la droite, de manière équiprobable. On note X_i le déplacement de l'objet à l'étape i : si le i-ème saut est vers la droite, on a $X_i = 1$; s'il est vers la gauche, on a $X_i = -1$. On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i; puis $E(X_i)$.
2. Montrer que $Y_i = \dfrac{1+X_i}{2}$ est une variable de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on définit $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Quelle loi suit Y ? En déduire son espérance et sa variance (on ne redémontrera pas les résultats de cours utilisés).
4. On note $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ le déplacement total de l'objet au bout de n étapes. Montrer que $X = 2Y - n$. En déduire l'espérance et la variance de X, puis en déduire $E(X^2)$.
   (NB : ceci donne l'ordre de grandeur de la distance moyenne entre l'objet et l'origine à la n-ème étape).

On s'intéresse maintenant à la probabilité de retour à l'origine au bout de $n = 2k$ étapes (il est clair que l'objet ne peut pas revenir à 0 après un nombre impair de sauts...)

5. On pose donc $n = 2k$. Donner la valeur de Y correspondant à $X = 0$, en fonction de k. Donner $P(Y = k)$; en déduire $P(X = 0)$.

Exercice 3. (À la fête foraine)
On considère une machine à sous constituée de 4 roues mobiles, fonctionnant de manière indépendante. Chaque roue comporte m secteurs ($m \geqslant 2$), dont un seul est gagnant. Un tirage consiste à faire tourner une ou plusieurs roues, qui s'arrêtent alors sur un secteur au hasard de manière équiprobable. On gagne quand toutes les roues sont sur leur secteur gagnant.
Initialement, aucune roue n'est sur son secteur gagnant. Un joueur joue plusieurs parties successives : à chaque partie, il fait tourner les roues qui ne sont pas sur le secteur gagnant, et laisse les autres.
On notera $p = \dfrac{1}{m}$, et $q = 1 - p$.

1. Soit X_1 le nombre de roues qui s'arrêtent sur leur secteur gagnant à l'issue du premier essai. Donner la loi de X_1.
2. Quelle est la probabilité que le joueur gagne à son premier essai ?
3. On suppose que le premier essai ne suffit pas à gagner.
   (a) On note $k \in [\![0,3]\!]$ le nombre de roues qui sont sur leur secteur gagnant à l'issue du premier essai. Le joueur relance alors les autres roues. Donner la probabilité qu'il gagne à ce second essai.
   (b) En déduire la probabilité que le joueur gagne en exactement deux essais.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En passant par l'événement contraire, donner la probabilité qu'une roue donnée soit gagnante en un nombre $\leqslant n$ d'essais.
5. Soit T la variable aléatoire comptant le nombre d'essais pour gagner. Calculer $P(T \leqslant n)$; en déduire la loi de T.

Exercice 4. (Lancers de pièce équilibrée)
On dispose d'une pièce équilibrée. On effectue l'expérience suivante :

- On lance une première fois la pièce jusqu'à obtenir Pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir Pile.
- Si $X = k$, on relance k fois la pièce. On note Y le rang du premier lancer où on obtient Pile ; si les k lancers donnent tous Face, on pose $Y = 0$.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour X ? pour Y ?
2. Donner la loi de X.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Donner, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $P_{(X=k)}(Y = i)$; donner également $P_{(X=k)}(Y = 0)$.
4. Déterminer la loi de Y (on séparera les cas $P(Y = 0)$ et $P(Y = i)$ pour $i \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 5. (Retour de soirée)
Une personne rentre de soirée. Elle dispose d'un trousseau de n clés, dont une seule ouvre sa porte. Elle ne se souvient plus de laquelle il s'agit et décide de toutes les essayer.

1. On suppose d'abord que, si une clé ne fonctionne pas, elle l'élimine du trousseau. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'essais effectués avant de trouver la bonne clé.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
   (b) Déterminer $P(X = k)$, puis le nombre moyen d'essais avant de trouver la bonne clé.
2. On suppose maintenant que la personne n'a pas la présence d'esprit d'éliminer une clé qui ne fonctionne pas : à chaque essai, elle choisit parmi les n clés. Reprendre les questions du 1.

Exercice 6. (Inférence bayésienne)
On dispose de 3 pièces de monnaie. Les deux premières sont équilibrées, tandis que la troisième tombe toujours sur Face. On choisit au hasard une pièce, qu'on lance 3 fois : on obtient 3 Face.

1. Quelle est la probabilité que la pièce choisie soit la pièce biaisée?
   On notera P_i l'événement «choisir la i-ème pièce», et 3F l'événement : «obtenir 3 Face».
2. On continue à lancer, et on obtient toujours des Face. Au bout de combien de lancers pourra-t-on affirmer avec une certitude de 99% que la pièce choisie est la pièce biaisée?

Indications

1 1. Avec les probas totales associées au SCE (B_1, R_1) :

$$P(B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(R_1)P_{R_1}(B_2) = \frac{1}{3}\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

2.

3.

2 1.

2.

3. Y_i compte le nombre de X_i égaux à 1

4. E(Y) et V(Y) sont connues ; en déduire E(X) et V(X)

5.

3 1. Succession d'expériences de Bernoulli indépendantes...

2. À quelle valeur de X_1 correspond cet événement ?

3. (a) Cette fois on ne fait plus tourner que $4-k$ roues.
   (b) Probas totales ; interpréter le résultat de la question précédente comme une proba conditionnelle.

4. Comment se traduit l'événement contraire à celui recherché sur les n premiers essais ?

5. Interpréter l'événement $T \leqslant n$ sur le nombre d'essais nécessaires à chaque roue pour être gagnante.
   $P(T = n)$ s'exprime ensuite en fonction de $P(T \leqslant n)$ et $P(T \leqslant n-1)$... pour des valeurs de n convenables !

4 1. Pour les valeurs de Y : quelles sont-elles si $X = k$?Et donc, quelles sont elles quand on prend en compte toutes les valeurs de X possibles ?

2. Loi usuelle...

3. Sachant $X = k$, quelle succession de lancers fournit $Y = i$ pour $i \in \mathbb{N}^*$? pour $i = 0$?
   Attention ça ressemble à une loi usuelle... mais pas tout à fait !

4. Probas totales, bien sûr.

5 1. (a)
   (b) On a $X = k$ ssi les $k-1$ premières clés ne sont pas la bonne, et si la k-ème est la bonne.
   Attention, les expériences successives ne sont pas indépendantes : on élimine les clés déjà testées.

2. Pour $X(\Omega)$ songer que cette fois, au contraire du schéma précédent, on peut choisir arbitrairement longtemps une mauvaise clé.
   Mais dans ce cas, le trousseau est identique à chaque choix de clé.

6 1. Il s'agit d'une proba conditionnelle (on sait qu'on a obtenu 3 Face).

2. Remplacer 3 par n...