Devoir maison n°3bis
Rendu libre

Vous traiterez au moins un des deux exercices suivants.
(NB : l'exercice 1 a été donné en DS l'an dernier ; les cubes se dirigeront plutôt vers l'exercice 2, mais il n'est pas forcément superflu de s'assurer que vous le maîtrisez)

Exercice 1

1. On définit la fonction f par :
$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)\ln(1+x) - x$$
   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ? Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur cet ensemble de définition, que l'on notera $\mathscr{D}_f$.
   (b) Calculer $f'(x)$; montrer : $\forall\, x \in \mathscr{D}_f,\ f''(x) = \dfrac{x}{2(1+x)^2}$.
   Déterminer le signe de f', les variations de f et le signe de f sur $\mathscr{D}_f$.
   (c) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f''(x) \leqslant \dfrac{x}{2}$.
   (d) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x^3}{12}$.
2. On définit dans cette question la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}\right)$$
   (a) En calculant soigneusement $u_n - u_{n+1}$, démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - u_{n+1} = nf\left(\frac{1}{n}\right)$$
   (b) En déduire que la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est convergente.
   (c) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   (d) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ (qu'on ne cherchera pas à calculer, ce sera pour plus tard) telle que :
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}$$

Exercice 2

On admet le **Théorème de Cesàro** :

> Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$; on a alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \ell$.

Dans toute la suite, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge. Pour tout entier naturel n non nul, on note :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\ ,\quad T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} S_k\ ,\quad y_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i x_i$$

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)x_i$.
   En déduire ensuite que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k$.
   Indication : on pourra utiliser une formule permettant d'intervertir une somme double.

(b) En utilisant le résultat admis au début de ce problème, établir que la série de terme général y_n converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

2. Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel n non nul : $z_n = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$.

On se propose de montrer que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

(a) On admet que si une fonction f est concave sur un intervalle I, alors, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathrm{I}^n,\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \leqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

Montrer que ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n,\ \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

(b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^{n} k x_k\right)^{1/n}$.

En déduire que : $z_n \leqslant \frac{n+1}{(n!)^{1/n}} y_n$.

(c) Montrer que, pour tout réel x positif, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.

(d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$.

(e) Calculer $\sum_{k=1}^{n} k\big(\ln(k+1) - \ln(k)\big)$ (on fera apparaître une somme téléscopique)

(f) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$.

Montrer enfin que la série de terme général z_n converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout k élément de $[\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

(b) Calculer l'intégrale $\int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ -1+\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln(n)}{n}.$$

(c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right)$, puis établir que : $(n!)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e}$.