Devoir maison n°3
À rendre pour le 16/11

Exercice 1

Soit x un réel de l'intervalle $[0,1[$ et k un entier naturel.

1. Déterminer un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque $n \to +\infty$ (avec démonstration !).
2. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$ est convergente. On note $s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.
3. Vérifier, pour tout réel x de $[0,1[$:
$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$
4. Pour tout couple d'entiers naturels (n,k) tels que $n > k$, montrer :
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$
5. Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0,1[$, déduire de la question précédente :
$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x)$$
Indication : on commencera par changer d'indice en posant $m = n-1$ dans la somme donnant $s_{k+1}(x)$; on pourra, si besoin, étendre le résultat de la question précédente à à $n = k$ en posant $\binom{k}{k+1} = 0$)
6. Montrer finalement par récurrence la *formule du binôme négatif* :
$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1[,\ s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Exercice 2

Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher.
On appelle « épreuve » la séquence suivante :

On tire une boule de l'urne, puis :

- Si la boule tirée est bleue , on la remet dans l'urne.
- Si la boule tirée est rouge , on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.

L'expérience aléatoire consiste à effectuer une succession illimitée d'épreuves.
Pour tout entier naturel n non nul , on note Y_n la variable aléatoire discrète égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue de la n-ième épreuve.
On notera pour chaque entier naturel k non nul les événements suivants :

- R_k : « Lors de la k-ième épreuve on a extrait une boule rouge de l'urne » .
- B_k : « Lors de la k-ième épreuve on a extrait une boule bleue de l'urne » .

1. Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle simule un tirage de la variable aléatoire Y_n.

```python
import numpy.random as rd
import numpy as np
def Y(n):
    r = 2
    for ... :
        if r>0 :
            if rd.random() .... :
                ...
    return ...
```

2. Donner la loi de probabilité de Y_1.

3. Déterminer, en justifiant soigneusement, $Y_n(\Omega)$ pour $n \geqslant 2$.

4. Calculer pour tout entier naturel non nul n, $P(Y_n = 2)$.

5. On pose pour tout entier naturel non nul n, $u_n = P(Y_n = 1)$.

   (a) Rappeler la valeur de u_1 et montrer que $u_2 = \dfrac{2}{3}$.

   (b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable Y_n, montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,
   $$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$$
   Cette relation reste-t-elle valable lorsque $n = 1$?

   (c) On pose pour tout entier naturel n non nul $v_n = u_n + \dfrac{2}{3^n}$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique.
   En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n}$.

   (d) Déduire des résultats précédents $P(Y_n = 0)$ pour tout entier naturel non nul n.

6. Calculer l'espérance de Y_n.

7. On note Z la variable aléatoire égale au numéro de l'épreuve lors de laquelle est tirée la dernière boule rouge.

   (a) Donner $Z(\Omega)$.

   (b) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Exprimer l'événement $(Z = k)$ en fonction des variables Y_k et Y_{k-1}.

   (c) En déduire la loi de Z.

   (d) Justifier l'existence, puis calculer $E(Z)$.

   (e) Programmer une fonction Python `Z()` qui renvoie un tirage de la variable aléatoire Z.

   (f) On suppose que la fonction précédente a été correctement codée ; on entre alors la commande

   ```python
   print(np.mean([Z() for k in range(10000)]))
   ```

   Que peut-on s'attendre à obtenir en sortie ?