Devoir maison n°3
Corrigé

Exercice 1

Soit x un réel de l'intervalle $[0,1[$ et k un entier naturel.

1. **Déterminer un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque $n \to +\infty$ (avec démonstration !).**

   cf. TD : $\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$.

2. **Montrer que la série $\sum_{n\geqslant k} \binom{n}{k} x^n$ est convergente. On note $s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.**

   Avec la question précédente on a donc l'équivalent :
   $$\binom{n}{k} x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k!} n^k x^n$$
   On est ramenés à l'étude de la série $\sum_n n^k x^n$ (l'indice de sommation est n ; k et x ne sont « que » des paramètres).
   Puissances vs. géométriques : on effectue un test de Riemann !
   $x \in [0,1[$ donc $|x| < 1$; par croissances comparées :
   $$\lim_{n\to+\infty} n^2 \times \left(n^k x^n\right) = \lim_{n\to+\infty} n^{k+2} x^n = 0$$
   d'où on déduit que
   $$n^k x^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
   La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$) donc par comparaison de SATP la série $\sum_n n^k x^n$ converge ; puis encore par comparaison de SATP la série $\sum_{n\geqslant k} \binom{n}{k} x^n$ converge.

3. **Vérifier, pour tout réel x de $[0,1[$:**
   $$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$
   En remplaçant k par 0 :
   $$s_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$
   et en remplaçant k par 1 :
   $$s_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$
   où on a reconnu les formules de cours sur la somme d'une série géométrique, et d'une série géométrique dérivée (on a bien $|x| < 1$).

4. **Pour tout couple d'entiers naturels (n,k) tels que $n > k$, montrer :**

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Exercice classique (formule de Pascal) : c'est de la manipulation de factorielles.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!(k+1)}{k!(k+1)(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k-1)!(n-k)} \\
&= \frac{n!\big(k+1+n-k\big)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

5. **Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0,1[$, déduire de la question précédente :**

$$s_{k+1}(x) = xs_k(x) + xs_{k+1}(x)$$

Indication : on commencera par changer d'indice en posant $m = n-1$ dans la somme donnant $s_{k+1}(x)$; on pourra, si besoin, étendre le résultat de la question précédente à à $n = k$ en posant $\binom{k}{k+1} = 0$)

NB : la formule de Pascal s'écrit, pour $n = k$: $\binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k}{k+1}$. Comme $\binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k} = 1$, en posant par convention $\binom{k}{k+1} = 0$, on a bien une formule valide pour $n = k$.

$s_{k+1}(x) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n = \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m+1}{k+1} x^{m+1}$ en suivant l'indication. Ensuite on a, en utilisant la formule précédente :

$$s_{k+1}(x) = x\sum_{m=k}^{+\infty}\left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1}\right)x^m = x\sum_{m=k}^{+\infty}\binom{m}{k}x^m + x\sum_{m=k}^{+\infty}\binom{m}{k+1}x^m = xs_k(x) + x\sum_{m=k}^{+\infty}\binom{m}{k+1}x^m$$

La dernière somme n'est pas exactement $s_{k+1}(x)$ car on a une somme $\sum_{m=k}^{+\infty}$ au lieu de $\sum_{m=k+1}^{+\infty}$... mais le terme $m = k$ qui manque vaut $\binom{k}{k+1}x^k$ et est donc nul !!

Ainsi :

$$s_{k+1}(x) = xs_k(x) + x\sum_{m=k}^{+\infty}\binom{m}{k+1}x^m = xs_k(x) + x\sum_{m=k+1}^{+\infty}\binom{m}{k+1}x^m = xs_k(x) + xs_{k+1}(x)$$

6. **Montrer finalement par récurrence la *formule du binôme négatif* :**

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1[,\ s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Avec $x \neq 1$, la relation établie à la question précédente se transforme en $s_{k+1}(x) = \frac{x}{1-x}s_k(x)$. Avec de plus $s_0(x) = \frac{1}{1-x}$, une récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ donne le résultat sans beaucoup de difficultés.

Exercice 2

Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher.
On appelle « épreuve » la séquence suivante :

On tire une boule de l'urne, puis :

- **Si la boule tirée est bleue , on la remet dans l'urne.**
- **Si la boule tirée est rouge , on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.**

L'expérience aléatoire consiste à effectuer une succession illimitée d'épreuves.
Pour tout entier naturel n non nul , on note Y_n la variable aléatoire discrète égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue de la n-ième épreuve.
On notera pour chaque entier naturel k non nul les événements suivants :

- R_k **: « Lors de la k-ième épreuve on a extrait une boule rouge de l'urne » .**
- B_k **: « Lors de la k-ième épreuve on a extrait une boule bleue de l'urne » .**

1. **Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle simule un tirage de la variable aléatoire Y_n.**

   L'urne contient à tout moment 3 boules. Si elle contient r rouges, la probabilité de tirer une rouge est $\frac{r}{3}$; dans ce cas il y aura une boule rouge de moins au tour suivant. De plus si à un instant on a $r = 0$, alors r reste nul.
   Le code consiste alors à faire évoluer la variable `r`, initialement égale à 2, selon ces règles sur n expériences, et à renvoyer la valeur finale.

```python
import numpy.random as rd
import numpy as np
def Y(n):
    r = 2 # nb de rouges ds l'urne
    for i in range(n) : # n expériences
        if r>0 :
            if rd.random() < r/3 : # si on tire une rouge
                r = r-1 # on la retire et on met une bleue à la place
    return r
```

2. **Donner la loi de probabilité de Y_1.**
   Y_1 est le nombre de boules rouges présentes dans l'urne après un tirage. Comme il y en a deux initialement, il peut en rester une (si on tire une rouge) ou 2 (si on tire une bleue).
   Donc $Y_1(\Omega) = \{1,2\}$ et avec les événements définis par l'énoncé :

$$P(Y_1 = 1) = P(R_1) = \frac{2}{3} \quad ; \quad P(Y_1 = 2) = P(B_1) = \frac{1}{3}$$

3. **Déterminer, en justifiant soigneusement, $Y_n(\Omega)$ pour $n \geqslant 2$.**
   Si on fait $n \geqslant 2$ expériences, on peut :

   - ne jamais tirer que des boules bleues, auquel cas on aura $Y_n = 2$
   - tirer une et une seule boule rouge, auquel cas on aura $Y_n = 1$
   - tirer deux boules rouges ; auquel cas l'urne ne contiendra plus de boule rouge et $Y_n = 0$.

   Ainsi $Y_n(\Omega) = \{0,1,2\}$.

4. **Calculer pour tout entier naturel non nul n , $P(Y_n = 2)$.**
   L'événement $(Y_n = 2)$ se formule comme : « après n tirages, il y a 2 boules rouges dans l'urne » . AU vu du protocole expérimental décrit, ceci arrive ssi on tire n fois une boule bleue. Le contenu de l'urne est identique à chaque tirage : 2 boules rouges et une boule bleue.
   On a donc par probas composées :

$$P(Y_n = 2) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \ldots \times P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1}}(B_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

   chaque probabilité de ce produit valant $\frac{1}{3}$.

5. **On pose pour tout entier naturel non nul n , $u_n = \mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = 1)$.**

(a) **Rappeler la valeur de u_1 et montrer que $u_2 = \dfrac{2}{3}$.**

On a vu que $u_1 = \mathrm{P}(\mathrm{Y}_1 = 1) = \dfrac{2}{3}$ en question 2.
On a $u_2 = \mathrm{P}(\mathrm{Y}_2 = 1)$: c'est la proba de n'avoir plus qu'une boule rouge dans l'urne après 2 tirages. Il y a deux possibilités : on tire d'abord une bleue puis une rouge ; ou d'abord une rouge puis une bleue.
Donc $u_2 = \mathrm{P}\big((\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{R}_2) \cup (\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{B}_2)\big)$. Les deux événements formant cette union sont clairement incompatibles. Par probas composées :

$$u_2 = \mathrm{P}(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{R}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{B}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_1)\mathrm{P}_{\mathrm{B}_1}(\mathrm{R}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{R}_1)\mathrm{P}_{\mathrm{R}_1}(\mathrm{B}_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$\mathrm{P}_{\mathrm{B}_1}(\mathrm{R}_2) = \dfrac{2}{3}$ car c'est la proba de tirer une rouge dans une urne contenant deux rouges et une bleue
$\mathrm{P}_{\mathrm{R}_1}(\mathrm{B}_2) = \dfrac{2}{3}$ car c'est la proba de tirer une bleue dans une urne contenant une rouge et deux bleues.

(b) **En utilisant un système complet d'événements lié à la variable Y_n, montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,**

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$$

Cette relation reste-t-elle valable lorsque $n = 1$?
Le système utilisé est $\big((\mathrm{Y}_n = k)\big)_{k \in \mathrm{Y}_n(\Omega)}$ (un tel système est TOUJOURS un SCE) ; comme $n \geqslant 2$ on obtient ici :

$$\big((\mathrm{Y}_n = 0), (\mathrm{Y}_n = 1), (\mathrm{Y}_n = 2)\big)$$

Les probas totales s'écrivent :

$$u_{n+1} = \mathrm{P}(\mathrm{Y}_{n+1} = 1) = \mathrm{P}_{(\mathrm{Y}_n=0)}(\mathrm{Y}_{n+1} = 1)\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = 0) + \mathrm{P}_{(\mathrm{Y}_n=1)}(\mathrm{Y}_{n+1} = 1)\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = 1) + \mathrm{P}_{(\mathrm{Y}_n=2)}(\mathrm{Y}_{n+1} = 1)\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = 2)$$

Si $(\mathrm{Y}_n = 0)$ (plus de boules rouges après n expériences) ; il ne peut pas y en avoir une au tour $n+1$!
Donc $\mathrm{P}_{(\mathrm{Y}_n=0)}(\mathrm{Y}_{n+1} = 1) = 0$.
$\mathrm{P}_{(\mathrm{Y}_n=1)}(\mathrm{Y}_{n+1} = 1)$ est la proba, sachant qu'il n'y a plus qu'une boule rouge dans l'urne, d'en tirer une bleue : donc $= \dfrac{2}{3}$.
$\mathrm{P}_{(\mathrm{Y}_n=2)}(\mathrm{Y}_{n+1} = 1)$ est la proba, sachant qu'il y a deux boules rouges dans l'urne, d'en tirer une rouge : donc $= \dfrac{2}{3}$.
Ainsi

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{2}{3}\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = 1) + \frac{2}{3}\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = 2) \\
&= \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}
\end{aligned}$$

Pour $n = 1$, la relation s'écrit : $u_2 = \dfrac{2}{3}u_1 + \dfrac{2}{9}$ et avec $u_1 = u_2 = \dfrac{2}{3}$ on vérifie que la relation est vraie.

(c) **On pose pour tout entier naturel n non nul $v_n = u_n + \dfrac{2}{3^n}$.**
Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique.
En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n}$.
On calcule simplement :

$$\begin{aligned}
\forall\, n \geqslant 1,\ v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+1}} &= \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} \\
&= \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3^{n+1}} \\
&= \frac{2}{3}\left(u_n + \frac{2}{3^n}\right) \\
&= \frac{2}{3}v_n
\end{aligned}$$

de sorte que (v_n) est bien géométrique, de raison $\frac{2}{3}$.

On a alors : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} v_1$ et avec $v_1 = u_1 + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{2^{n+1}}{3^n} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

et enfin $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = v_n - \frac{2}{3^n} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}$.

(d) **Déduire des résultats précédents $P(Y_n = 0)$ pour tout entier naturel non nul n.**

Si $n = 1$, $(Y_1 = 0)$ est impossible (question 2) et donc $P(Y_1 = 0) = 0$.

Pour $n \geqslant 2$ on a $Y_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, et donc :

$$P(Y_n = 0) = 1 - P(Y_n = 1) - P(Y_n = 2) = 1 - u_n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$P(Y_n = 0) = 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3^n} - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

6. **Calculer l'espérance de Y_n.**

Y_n prend un nombre fini de valeurs donc son espérance existe, et :

- Si $n = 1$, d'après la loi vue en question 2, $E(Y_1) = 1 \times P(Y_1) + 2 \times P(Y_1 = 2) = \frac{4}{3}$.

- Pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} E(Y_n) = 0 \times P(Y_n = 0) + 1 \times P(Y_n = 1) + 2 \times P(Y_n = 2) &= 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n} + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 2\left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

7. **On note Z la variable aléatoire égale au numéro de l'épreuve lors de laquelle est tirée la dernière boule rouge.**

(a) **Donner $Z(\Omega)$.**

On peut ne tirer que des rouges tant que l'urne en contient, auquel cas $Z = 2$; mais on peut aussi tirer arbitrairement longtemps des boules bleues car il y a remise. Z peut donc prendre n'importe quelle valeur entière supérieure à 2 :

$$Z(\omega) = [\![2, +\infty[\![= \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

(NB : il y a une subtilité ici mais les outils qui permettent de la résoudre sont devenus hors-programme : peut-on tirer indéfiniment des boules bleues, auquel cas l'expérience ne termine jamais et Z n'est pas défini ? On peut en fait montrer que cet événement est de probabilité nulle, et donc considérer que Z est « presque sûrement »[1] défini.)

(b) **Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Exprimer l'événement $(Z = k)$ en fonction des variables Y_k et Y_{k-1}.**

On a $(Z = k)$ ssi on tire la dernière rouge à la k-ième expérience ; ce qui renvient à dire qu'il y a une rouge dans l'urne à l'issue de la $(k-1)$-ème expérience et 0 à l'issue de la k-ième.

Ainsi

$$(Z = k) = (Y_{k-1} = 1) \cap (Y_k = 0)$$

(c) **En déduire la loi de Z.**

On déduit directement :

$$\begin{aligned} \forall\, k \geqslant 2,\ P(Z = k) = P\big((Y_{k-1} = 1) \cap (Y_k = 0)\big) &= P(Y_{k-1} = 1) \times P_{(Y_{k-1}=1)}(Y_k = 0) \\ &= u_{k-1} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{2}{3^{k-1}}\right) \end{aligned}$$
$$P(Z = k) = \frac{2^k - 2}{3^k}$$

[1] On appelle événement « presque sûr » un événement de probabilité 1.

Exercice : vérifier que $\sum_{k\in Z(\Omega)} P(Z=k)=1$ **!**

(d) **Justifier l'existence, puis calculer** $E(Z)$**.**

On s'intéresse à la convergence (absolue, mais les termes sont positifs !) de la série de terme général $kP(Z=k)$.

Or :

$$kP(Z=k)=k\times\frac{2^k-2}{3^k}=k\left(\frac{2}{3}\right)^k-2k\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

et on reconnaît une combinaison linéaires de séries géométriques dérivées, de raisons respectives $2/3$ et $1/3$, éléments de $]-1,1[$. Il y a bien convergence.

Pour le calcul (d'après ce qui est dit on peut découper la somme) :

$$\begin{aligned}E(Z)&=\sum_{k=2}^{+\infty}k\times\frac{2^k-2}{3^k}\\&=\frac{2}{3}\sum_{k=2}^{+\infty}k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}-2\times\frac{1}{3}\sum_{k=2}^{+\infty}k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\\&=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{(1-2/3)^2}-1\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{(1-1/3)^2}-1\right)\end{aligned}$$

(attention à retrancher les termes $k=1$ absents dans le calcul !)

$$=\ldots=\frac{9}{2}$$

(e) **Programmer une fonction Python** `Z()` **qui renvoie un tirage de la variable aléatoire Z.**

Le squelette est essentiellement celui de la fonction précédente : on fait évoluer le nombre de boules rouges selon le protocole donné par l'énoncé. Cette fois on ne boucle pas un nombre prédéfini de fois, mais on continue tant qu'il y a des rouges : boucle while ! Et on renvoie le nombre d'expériences effectuées, qu'il est donc nécessaire de compter.

```python
def Z():
    r = 2 # nb de rouges ds l'urne
    n = 0 # nb d'expériences
    while r > 0 : # tant qu'il y a des rouges
        if rd.random() < r/3 : # si on tire une rouge
            r = r-1 # on la retire et on met une bleue à la place
        n = n+1 # compteur d'expériences
    return n
```

(f) **On suppose que la fonction précédente a été correctement codée ; on entre alors la commande**

```python
print(np.mean([Z() for k in range(10000)]))
```

Que peut-on s'attendre à obtenir en sortie ?

Ici la liste définie par la commande `[Z() for k in range(10000)]` contient les résultats de 10000 appels successifs de la fonction `Z` ; donc 10000 tirages de la variable Z.

On effectue la moyenne de ces résultats : ceci devrait[2] donner une valeur approchée de l'espérance de Z, qui vaut $\frac{9}{2}$.

Effectivement, si on entre tout ça dans un ordinateur, des appels successifs à cette commende affichent des sorties (aléatoires !) comme `4.5347`, `4.4694`, etc.

[2] On n'a pas encore justifié cette propriété cette année : les cubes se feront un plaisir de vous renseigner :)