Couples de variables aléatoires discrètes
Exercices

Exercice 1. **(*)** Dans les situations suivantes, reconnaître la loi usuelle suivie par la variable X (argumenter proprement votre réponse) et donner ses paramètres.

1. Au loto, un ticket est gagnant avec probabilité p. Une personne achète un ticket par jour. X est le nombre de tickets qu'il est nécessaire d'acheter pour obtenir un ticket gagnant.
2. On considère 3 urnes U_1, U_2, U_3 dans lesquelles on jette n boules. Les n boules sont indépendantes, et une boule va dans U_1, U_2 ou U_3 de manière équiprobable.
   X est le nombre de boules dans U_1.
3. 10 personnes montent dans un ascenseur qui dessert 5 étages. Chaque personne choisit un étage de manière équiprobable ; les choix des différentes personnes sont indépendants. X est le nombre de personnes choisissant le 3ème étage.
4. Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules noires. On effectue des tirages avec remise ; on note X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois une boule noire.
5. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10, indiscernables au toucher. On effectue n tirages avec remise. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, X est la variable aléatoire donnant le numéro de la boule tirée au k-ème tirage.

Exercice 2. **(*)**
Soit X,Y un couple de variables aléatoires à valeurs dans $[\![0, 2]\!]^2$, dont la loi conjointe est donnée par : ,

X\Y	0	1	2
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

1. **(*)** Donner les lois marginales de X et Y.
2. **(*)** Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Donner la loi conditionnelle de X sachant $(Y = 1)$.
4. **(*)** Donner la loi de $X + Y$.
5. Donner la loi de $\min(X, Y)$.

Exercice 3. On lance de manière répétée une pièce donnant Pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$; les différents lancers sont indépendants. On note X le rang du premier Pile obtenu, et Y le rang du second Pile obtenu.

1. **(*)** Donner la loi de X.
2. **(*)** Calculer $P\big((X = i) \cap (Y = j)\big)$ pour tous entiers $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$; en déduire la loi de Y.
3. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.
4. Montrer que E(Y) existe et la calculer.

Exercice 4. (*)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant $\mathscr{G}(p)$ (avec $p \in]0,1[$).

1. Donner la loi du couple (X, Y).
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(X \geqslant k)$. En déduire la loi de $\min(X, Y)$; reconnaître cette loi.
3. Déterminer les lois de $\max(X, Y)$ et de $X + Y$.
4. Calculer $P(X = Y)$ et $P(X \geqslant Y)$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi $\mathscr{G}(p)$. Déterminer les lois de $U = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $V = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

Exercice 6. Un mobile se déplace sur un axe gradué selon les règles suivantes. À l'instant initial, il se au point d'abscisse 0. Si à l'instant $n \geqslant 0$ le mobile est à l'abscisse k, alors au temps $n + 1$:

- il avance à l'abscisse $k + 1$ avec une probabilité $p \in]0,1[$;
- sinon il retourne au point de départ, à l'abscisse 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n.

1. Donner la loi de probabilité de X_1 .
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, $P(X_n = k) = pP(X_{n-1} = k - 1)$.
4. Vérifier explicitement que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n) = pE(X_{n-1}) + p$; en déduire une expression de $E(X_n)$ en fonction de n et p.
6. Programmer une fonction Python qui prend en argument $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$, et renvoie un tirage de la variable aléatoire X_n.
7. Écrire une suite d'instructions Python qui renvoie la moyenne de 10000 tirages de X_5 en appelant la fonction précédente. De quel nombre la valeur obtenue est-elle une approximation ?

Exercice 7. Soit n un entier $\geqslant 3$. Une urne contient 2 boules blanches indiscernables et $n - 2$ boules noires indiscernables. On tire une à une, sans remise, toutes les boules de l'urne. On note X le rang du tirage de la première boule blanche et Y le rang du tirage de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
2. Soit $k \in X(\Omega)$; déterminer $\mathrm{Card}\,(X = k)$. En déduire la loi de X.
3. De même, déterminer la loi de Y.
4. Déterminer $\mathrm{Card}\big((X = k) \cap (Y = \ell)\big)$ (on distinguera suivant $k < \ell$ ou $k \geqslant \ell$). Donner la loi conjointe de X et Y. Retrouver à partir de celle-ci les lois marginales de X et de Y.
5. X et Y sont-elles indépendantes ?
6. Calculer $E(Y)$.

Exercice 8. Dans un magasin, on modélise le nombre de clients dans une journée par une VAD X suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
La probabilité qu'un client effectue un achat dans le magasin est égale à p (avec $p \in]0,1[$). On note Y le nombre de clients effectuant un achat dans la journée.

1. Déterminer la loi de Y sachant $(X = n)$
2. Déterminer la loi du couple (X, Y).
3. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.
4. Déterminer la loi de $X - Y$.
5. (a) Établir l'indépendance des variables aléatoires Y et $X - Y$.
   (b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

Exercice 9. On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, initialement vides. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à y déposer une boule. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.
Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i est toujours vide au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. (a) Pour tous $(i, k) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $U_{i,k}$ l'événement « l'urne numéro i est choisie à la k-ième épreuve ». Écrire l'événement $(X_i = 1)$ à l'aide de certains des événements $U_{i,k}$ puis montrer que :
$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$
   (b) Justifier que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $[\![1, n]\!]$, on a :
$$P\left([X_i = 1] \cap [X_j = 1]\right) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$
   (c) Comparer $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $[\![1, n]\!]$, alors les variables X_i et X_j ne sont pas indépendantes.
2. On pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_i$.
   (a) Déterminer l'espérance de Y_n, notée $E(Y_n)$.
   (b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
3. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.
   (a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $E(N_i)$.
   (b) Que vaut le produit $N_i X_i$?
   (c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?
4. Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule l'expérience pour un entier n passé en argument, et renvoie les listes $[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ et $[N_1, \ldots, N_n]$.

```
import numpy.random as rd
def experience(n):
    X = ... # initialisation de la liste [X1,...,Xn]
    N = ... # initialisation de la liste [N1,...,Nn]
    for k ... :
        urne = ... # choix équiprobable dans {1,2,...,n}
        ..... # modification éventuelle de la liste X
        ..... # et de la liste N
    return X,N
```

Exercice 10. Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée d'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0,1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1-p$.

On note A l'événement: « C_3 termine en dernier son opération » .
NB : si C_3 termine en même temps que l'autre client restant, on considère que A n'est pas réalisé.
On se propose de calculer la probabilité de A.
On définit la variable aléatoire $\Delta = |X_1 - X_2|$.

1. Montrer que $P(\Delta = 0) = \dfrac{p}{1+q}$.

2. Soit n un entier naturel non nul.

   (a) Justifier: $P(X_1 - X_2 = n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k)P(X_1 = n+k)$.

   (b) En déduire: $P(\Delta = n) = \dfrac{2pq^n}{1+q}$.

3. (a) Montrer que Δ admet une espérance $E(\Delta)$ et la calculer.

   (b) Montrer: $E\left((X_1 - X_2)^2\right) = 2V(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $V(\Delta)$ et la calculer.

4. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $(X_3 > \Delta)$.

5. (a) En déduire: $P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(\Delta = k)P(X_3 > k)$.

   (b) Exprimer $P(A)$ à l'aide de p et q.

6. **Simulation informatique.**

   (a) On conserve les notations de l'exercice, et on suppose que C_1 termine son opération avant C_2. Donner en fonction de X_1, X_2, X_3 le temps au bout duquel C_3 termine son opération.

   (b) Décrire le résultat de la commande Python :

   ```
   rd.geometric(1/3,3)
   ```

   (c) Compléter le programme suivant pour qu'il modélise l'expérience aléatoire de cet exercice : le programme devra renvoyer 1 lorsque l'événement A est réalisé, et 0 sinon.

   ```
   def tirage(p):
       temps=............. # tirage des 3 temps de passage
                           # suivant G(p)
       if ... : # 1 finit avant 2~: 3 va au guichet libéré par 1

           if ... : # 2 finit avant 3
               a = ...
           else :
               a = ...
       else:
           if ... :
               ...
           else :
               ...
       return a
   ```

   (d) Comment utiliser ce programme pour obtenir une valeur approchée de $P(A)$?

Un peu plus théorique

Exercice 11 (Implications et inclusions)**.**
On rappelle que si A et B sont deux événements tels que $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$. On donne ici quelques exemples de raisonnements qui permettent de passer d'une implication logique à une inégalité sur les probabilités.

1. Soit X une variable aléatoire, et a et b deux réels tels que $a \leqslant b$.
   (a) Justifier rigoureusement que $(X \leqslant a) \subset (X \leqslant b)$.
   (b) En déduire la monotonie de la *fonction de répartition* de X, définie par $F_X : x \mapsto P(X \leqslant x)$.
2. On effectue une succession illimitée de lancers d'une pièce de monnaie. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement : « le premier Pile arrive après le k-ème lancer » .
   Donner la monotonie de la suite $\big(P(A_k)\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$.
3. On reprend l'expérience du DM : dans une urne contenant des boules rouges et bleues, on effectue des tirages successifs. Si on tire une boule rouge, on l'enlève de l'urne, et on la remplace par une bleue ; si on tire une boule bleue, on la remet dans l'urne.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle Y_n le nombre de boules rouges dans l'urne après n tirages.
   Montrer que $P(Y_n = 0) \leqslant P(Y_{n+1} = 0)$. En déduire la convergence de la suite $\big(P(Y_n = 0)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 12 (Indicatrices)**.**
Soit A un événement. On définit la variable aléatoire de Bernoulli $\mathbb{1}_A$ de la manière suivante :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \text{ ssi } \omega \in A, \text{ et } \mathbb{1}_A(\omega) = 0 \text{ sinon}$$

Autrement dit $\mathbb{1}_A = 1$ ssi l'événement A est réalisé.
On appelle $\mathbb{1}_A$ l'*indicatrice de l'événement A*.

1. Déterminer la loi de $\mathbb{1}_A$. En déduire $E(\mathbb{1}_A)$ et $V(\mathbb{1}_A)$.
2. Montrer que $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
3. Montrer que si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$ est la variable constante égale à 1.
4. Montrer que $P\big((\mathbb{1}_A = 1) \cap (\mathbb{1}_B = 1)\big) = P(A \cap B)$.
   En déduire que si $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ sont indépendantes, alors A et B sont indépendants.
5. On rappelle que si A et B sont des événements indépendants, alors les événements $\overline{A}$ et B le sont également, ainsi que les événements A et $\overline{B}$, et les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
   Montrer que si A et B sont indépendants, alors $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ sont indépendantes.
6. Montrer que $\mathbb{1}_{A \cup B} = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$.

Exercice 13 (Une formule classique pour l'espérance)**.**

Soit (u_n) une suite à termes positifs. On suppose que la série de terme général u_n converge. On pose alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
On cherche à montrer que $\sum R_n$ si et seulement si $\sum n u_n$ converge, et que dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{k=1}^{+\infty} k u_k \qquad (*)$$

1. Pour $n \geqslant 1$, exprimer u_n en fonction de R_n et R_{n-1}. En déduire, pour $N \geqslant 1$, que

$$\sum_{n=1}^{N} n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} R_n - N R_N$$

2. On suppose que $\sum nu_n$ converge.

   (a) Montrer $0 \leqslant \mathrm{NR_N} \leqslant \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{+\infty} ku_k$. En déduire que $\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{NR_N} = 0$.

   (b) Montrer que $\sum \mathrm{R}_n$ converge, et l'égalité $(*)$.

3. On suppose maintenant que $\sum \mathrm{R_N}$ converge.

   (a) Montrer que les sommes partielles de la série $\sum nu_n$ sont majorées. En déduire la convergence de $\sum nu_n$.

   (b) Montrer alors que $\mathrm{NR_N}$ tend vers une limite finie $\ell \geqslant 0$. Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.

   (c) En déduire l'égalité $(*)$.

4. *Application.*
   Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant n)$ converge, et que dans ce cas :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant n)$$

Solutions

1 1. $\mathscr{G}(p)$

2. $\mathscr{B}(n, 1/3)$

3. $\mathscr{B}(10, 1/5)$

4. $\mathscr{G}(3/10)$

5. $\mathscr{U}([\![1, 10]\!])$

2 1. Avec le système complet d'événements $\big\{(X=0), (X=1), (X=2)\big\}$:

$$P(Y=0) = P\big((X=0)\cap(Y=0)\big) + P\big((X=1)\cap(Y=0)\big) + P\big((X=2)\cap(Y=0)\big) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

et de même

$$P(Y=1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

et

$$P(Y=2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

Avec le système complet d'événements $\big\{(Y=0), (Y=1), (Y=2)\big\}$:

$$P(X=0) = P\big((X=0)\cap(Y=0)\big) + P\big((X=0)\cap(Y=1)\big) + P\big((X=0)\cap(Y=2)\big) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

et de même

$$P(X=1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

et

$$P(X=2) = \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

2. On voit par exemple que $P\big((X=2)\cap(Y=1)\big) = 0$, tandis que $P(X=2) = \dfrac{1}{6}$ et $P(Y=1) = \dfrac{1}{3}$. Donc $P\big((X=2)\cap(Y=1)\big) \neq P(X=2)\times P(Y=1)$: X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Pour tout $k \in [\![0,2]\!]$, $P_{(Y=1)}(X=k) = \dfrac{P\big((X=k)\cap(Y=1)\big)}{P(Y=1)} = \dfrac{P\big((X=k)\cap(Y=1)\big)}{1/3}$. Donc

$$P_{(Y=1)}(X=0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad P_{(Y=1)}(X=1) = \frac{1}{2} \quad ; \quad P_{(Y=1)}(X=2) = 0$$

4. Les valeurs possibles de la v.a. $X+Y$ sont $\{0,1,2,3,4\}$.
On a :

- $(X+Y=0) = \big((X=0)\cap(Y=0)\big)$ et donc $P(X+Y=0) = P\big((X=0)\cap(Y=0)\big) = \dfrac{1}{12}$
- $(X+Y=1) = \big((X=1)\cap(Y=0)\big) \cup \big((X=0)\cap(Y=1)\big)$ (réunion incompatible) et donc $P(X+Y=1) = P\big((X=0)\cap(Y=1)\big) + P\big((X=1)\cap(Y=0)\big) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$
- et de même :

$$P(X+Y=2) = P\big((X=0)\cap(Y=2)\big) + P\big((X=1)\cap(Y=1)\big) + P\big((X=0)\cap(Y=2)\big) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$P(X+Y=3) = P\big((X=2)\cap(Y=1)\big) + P\big((X=1)\cap(Y=2)\big) = 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$P(X+Y=4) = P\big((X=2)\cap(Y=2)\big) = \frac{1}{12}$$

5. On procède encore par examen des événements : l'événement $(\min(X,Y)=0)$ s'écrit comme l'union des événements incompatibles :

$$\big(\min(X,Y)=0\big)=\big((X=0)\cap(Y=0)\big)\cup\big((X=0)\cap(Y=1)\big)\cup\big((X=0)\cap(Y=2)\big)\cup\big((X=1)\cap(Y=0)\big)\cup\big((X=2)\cap(Y=0)\big)$$

d'où :

$$P\big(\min(X,Y)=0\big)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$$

et de même

$$\big(\min(X,Y)=1\big)=\big((X=1)\cap(Y=1)\big)\cup\big((X=1)\cap(Y=2)\big)\cup\big((X=2)\cap(Y=1)\big)$$

d'où :

$$P\big(\min(X,Y)=1\big)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+0=\frac{1}{3}$$

Enfin

$$\big(\min(X,Y)=2\big)=\big((X=2)\cap(Y=2)\big)$$

d'où :

$$P\big(\min(X,Y)=2\big)=\frac{1}{12}$$

3 1. Succession d'expériences (lancer de pièce) indépendantes, de proba de succès (Pile) égale à p ; X compte le rang du premier Pile donc $X\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$.

2. X est le rang du premier Pile et Y le rang du second. X ne peut donc pas prendre une valeur inférieure ou égale à celle de Y : si $i>j$, $P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)=0$.
Pour $i<j$, l'événement $\big((X=i)\cap(Y=j)\big)$ correspond à une succession de j lancers donnant tous Face, sauf le i-ème et le j-ème qui donnent Pile. Si on note P_k : «obtenir Pile au k-ème lancer» et F_k : «obtenir Face au k-ème lancer», on a : $\big((X=i)\cap(Y=j)\big)=F_1\cap\cdots\cap F_{i-1}\cap P_i\cap F_{i+1}\cap\cdots\cap F_{j-1}\cap P_j$.
Par indépendance des lancers ces événements successifs sont indépendants, d'où

$$P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)=q\dots q\times p\times q\dots q\times p=q^{j-2}p^2$$

(j lancers dont 2 Pile, donc $j-2$ Face et 2 Pile).
Maintenant $Y(\Omega)=[\![2,+\infty[\![=\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$; et avec le système complet d'événements $\big((X=i)\big)_{i\in,\mathbb{N}^*}$ on a, pour tout $j\geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
P(Y=j)&=\sum_{i=1}^{+\infty}P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)\\
&=\sum_{i=1}^{j-1}P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)\qquad\text{(pour } i\geqslant j \text{ les termes à sommer sont nuls)}\\
&=\sum_{i=1}^{j-1}q^{j-2}p^2\\
P(Y=j)&=(j-1)q^{j-2}p^2\qquad\text{terme indépendant de l'indice de sommation}
\end{aligned}$$

3. On a vu que X prenait toujours des valeurs inférieures à Y... donc par exemple $P\big((X=2)\cap(Y=2)\big)=0$, alors que $P(X=2)=qp$ et $P(Y=2)=p^2$. Donc $P\big((X=2)\cap(Y=2)\big)\neq P(X=2)P(Y=2)$: X e tY ne sont pas indépendantes.

4. E(Y) existe ssi la série de terme général $jP(Y=j)$ converge absolument. Ici : $jP(Y=j)=p^2\big(j(j-1)q^{j-2}\big)$ et on reconnaît une série géométrique dérivée seconde, de raison $q\in]-1,1[$ (car $p\in]0,1[$ donc $q=1-p\in$ $]0,1[$ également).
Il y a bien convergence absolue donc E(Y) existe ; en sommant sur les valeurs possibles de Y :

$$E(Y)=\sum_{j=2}^{+\infty}p^2j(j-1)q^{j-2}=p^2\frac{2}{(1-q)^3}=\frac{2}{p}$$

en remarquant que $1-q=p$.

4 1. Par indépendance de X et Y : $\forall\,(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ \mathrm{P}\big((\mathrm{X}=i)\cap(\mathrm{Y}=j)\big)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=i)\times\mathrm{P}(\mathrm{Y}=j)=q^{i-1}p\times q^{j-1}p=p^2q^{i+j-2}$.

2. On écrit $\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant k)=\sum_{i=k}^{+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{X}=i)=\sum_{i=k}^{+\infty}q^{i-1}p=q^{-1}p\sum_{i=k}^{+\infty}q^i=pq^{-1}\dfrac{q^k}{1-q}=q^{k-1}$ avec $1-q=p$.
On peut aussi remarquer qu'en interprétant X comme le rang d'un 1er succès, on a $\mathrm{X}\geqslant k$ ssi les $k-1$ premières expériences ont été des échecs ; ce qui par indépendances desdites expériences redonne la probabilité q^{k-1}.
X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc leur min également ; pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ on écrit :

$$\big(\min(\mathrm{X},\mathrm{Y})\geqslant k\big)=(\mathrm{X}\geqslant k)\cap(\mathrm{Y}\geqslant k)$$

donc par indépendance de X et Y :

$$\mathrm{P}\big(\min(\mathrm{X},\mathrm{Y})\geqslant k\big)=\mathrm{P}\big((\mathrm{X}\geqslant k)\cap(\mathrm{Y}\geqslant k)\big)=\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant k)\times\mathrm{P}(\mathrm{Y}\geqslant k)=(q^{k-1})^2=q^{2k-2}$$

car $\mathrm{P}(\mathrm{Y}\geqslant k)=q^{k-1}$ (même loi que X !!).

Ensuite, pour $k\in\mathbb{N}^*$, en notant $m=\min(\mathrm{X},\mathrm{Y})$: $(m\geqslant k)=(m=k)\cup(m\geqslant k+1)$ (union incompatible) ce qui donne $\mathrm{P}(m\geqslant k)=\mathrm{P}(m=k)+\mathrm{P}(m\geqslant k+1)$ ou encore

$$\mathrm{P}(m=k)=\mathrm{P}(m\geqslant k)-\mathrm{P}(m\geqslant k+1)$$

donc

$$\mathrm{P}\big(\min(\mathrm{X},\mathrm{Y})=k\big)=q^{2k-2}-q^{2(k+1)-2}=q^{2k-2}-q^{2k}=q^{2k-2}\left(1-q^2\right)=\left(q^2\right)^{k-1}\left(1-q^2\right)$$

et on reconnaît $\min(\mathrm{X},\mathrm{Y})\hookrightarrow\mathscr{G}\left(1-q^2\right)$.

3. Pour la loi du max on part de la propriété : pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\big(\max(\mathrm{X},\mathrm{Y})\leqslant k\big)=(\mathrm{X}\leqslant k)\cap(\mathrm{Y}\leqslant k)$$

X et Y prennent des valeurs entières, donc pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant k)=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}>k)=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant k+1)=1-q^k$.
Par indép de X et Y : $\forall\,k\geqslant 1$,

$$\mathrm{P}\big(\max(\mathrm{X},\mathrm{Y})\leqslant k\big)=\mathrm{P}\big((\mathrm{X}\leqslant k)\cap(\mathrm{Y}\leqslant k)\big)=\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant k)\times\mathrm{P}(\mathrm{Y}\leqslant k)=\left(1-q^k\right)^2$$

Et avec un raisonnement analogue au précédent :

$$\mathrm{P}\big(\max(\mathrm{X},\mathrm{Y})=k\big)=\mathrm{P}\big(\max(\mathrm{X},\mathrm{Y})\leqslant k\big)-\mathrm{P}\big(\max(\mathrm{X},\mathrm{Y})\leqslant k-1\big)=\left(1-q^k\right)^2-\left(1-q^{k-1}\right)^2$$

(encore valable pour $k=1$, car alors $\mathrm{P}(\max(\mathrm{X},\mathrm{Y})\leqslant 0)=0$ et $(1-q^0)^2=0$).
X et Y sont entiers non nuls donc $(\mathrm{X}+\mathrm{Y})(\Omega)=\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.
Avec une FPT sur le système complet $((\mathrm{X}=k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ on a, pour tout $n\geqslant 2$:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{P}((\mathrm{X}=k)\cap(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n))=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{P}((\mathrm{X}=k)\cap(\mathrm{Y}=n-k))=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\times\mathrm{P}(\mathrm{Y}=n-k)$$

Y prenant des valeurs >0, $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=n-k)$ est nulle pour $k\geqslant n$; de sorte que la somme s'arrête en fait à $n-1$.
On trouve finalement :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n)=\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\times\mathrm{P}(\mathrm{Y}=n-k)=\sum_{k=1}^{n-1}q^{k-1}pq^{n-k-1}p=p^2\sum_{k=1}^{n-1}q^{n-2}=(n-1)p^2q^{n-2}$$

4. Avec le même SCE que la question précédente on peut écrire :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{P}((\mathrm{X}=k)\cap(\mathrm{Y}=k))=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\times\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}(q^{k-1}p)^2=\frac{p^2}{1-q^2}=\frac{p}{1+q}$$

Et avec le SCE sur Y :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant\mathrm{Y})=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{P}((\mathrm{X}\geqslant\mathrm{Y})\cap(\mathrm{Y}=k))=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{P}((\mathrm{X}\geqslant k)\cap(\mathrm{Y}=k))=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant k)\times\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)$$

et avec une question précédente :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant\mathrm{Y})=\sum_{k=1}^{+\infty}q^{k-1}\times q^{k-1}p=\frac{p}{1-q^2}=\frac{1}{1+q}$$

5 Cours !

6 Un mobile se déplace sur un axe gradué selon les règles suivantes. À l'instant initial, il se au point d'abscisse 0. Si à l'instant $n \geqslant 0$ le mobile est à l'abscisse k, alors au temps $n+1$:

- il avance à l'abscisse $k+1$ avec une probabilité $p \in]0,1[$;
- sinon il retourne au point de départ, à l'abscisse 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n.

1.
2. Si $X_n = k$, que peut valoir X_{n+1} ?
3. La position au temps n dépend de celle au temps $n-1$: il faut donc « sommer sur toutes les valeurs de X_{n-1} » . Quelle formule permet de faire ça ?
4.
5. Manipuler des sommes ; puis se souvenir de son cours d'ECG1 sur les suites.
6. On utilisera avec profit `if rd.random()<p:`
7.

7

1. LA première blanche peut arriver partout sauf en dernier, donc $X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$.De même, $Y(\Omega) = [\![2, n]\!]$.
2. Ici on appelle issue un déroulement complet de l'expérience : ceci est caractérisé par l'ordre dans lequel sont tirées les boules.
   $(X = k)$ est réalisé ssi la première boule apparaît en k-ème. Alors les k premières boules sont fixées ($k-1$ rouges puis une blanche) ; et la seconde blanche se trouve parmi les $n-k$ suivantes : il y a donc $n-k$ choix.
   Ainsi $\operatorname{Card}(X = k) = n-k$.
   Pour appliquer une équiproba il faut dénombrer l'ensemble de toutes les issues. Les boules étant indiscernables ceci revient à compter le nombre de manières de disposer les 2 blanches parmi n boules. Il ya donc $\binom{n}{2}$ issues. On a donc : $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ P(X = k) = \dfrac{n-k}{\binom{2}{n}} = \dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$.
3. Cette fois, si la seconde boule est située en k-ème position, les boules $k+1, \dots, n$ sont forcément rouges ; et le seul choix porte sur la position de la première blanche parmi kes $k-1$ premières boules tirées.
   $\operatorname{Card}(Y = k) = k-1$ donc $\forall k \in [\![2, n]\!],\ P(Y = k) = \dfrac{2(k-1)}{n(n-1)}$.
4. Si $k \geqslant \ell$ l'événement $(X = k) \cap (Y = \ell)$ est un événement où la seconde boule apparaît avant la première... donc de proba nulle.
   Si $k < \ell$ on cherche l'ensemble des issues pour lesquelles la première blanche est en k et la seconde en ℓ... ce qui fixe complètement le tirage ! $\operatorname{Card}((X = k) \cap (Y = \ell)) = 1$ et $P((X = k) \cap (Y = \ell)) = \dfrac{2}{n(n-1)}$.
   On retrouve la loi marginale d'une variable en sommant sur les valeurs de l'autre :
   $$P(X = k) = \sum_{\ell=2}^{n} P((X = k) \cap (Y = \ell)) = \sum_{\ell=k+1}^{n} \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$
   (le terme à sommer est constant et les termes de la somme sont nuls pour $\ell \leqslant k$). De même
   $$P(Y = \ell) = \sum_{k=1}^{n-1} P((X = k) \cap (Y = \ell)) = \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(\ell-1)}{n(n-1)}$$
   et on retrouve les résultats précédents.
5. X et Y ne sont pas indépendantes par un argument usuel : prendre des valeurs possibles pour chaque variable, mais impossibles simultanément.
   Avec $n \geqslant 3$ on voit que $P(X = 2)$ et $P(Y = 2)$ sont non nulles mais que $P((X = 2) \cap (Y = 2))$ est nulle car X et Y ne peuvent pas être égales : d'où la non-indépendance.

6. Avec $Y(\Omega) = [\![2, n]\!]$:

$$E(Y) = \sum_{\ell=2}^{n} \ell P(Y = \ell) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{\ell=2}^{n} \ell(\ell-1) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{\ell=1}^{n-1} (\ell+1)\ell = \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^2 + \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell \right)$$

Avec les formules usuelles pour $\sum \ell$ et $\sum \ell^2$ on trouve $E(Y) = \dfrac{2n+2}{3}$ (attention ne pas développer, un facteur $n(n-1)$ se simplifie en haut et en bas).

8 1. Sachant que n clients passent dans la boutique $(X = n)$, on se demande quelle est la probabilité que k clients effectuent un achat $(Y = k)$.
Les clients sont supposés agir indépendamment les uns des autres ; on a donc affaire à un schéma de loi binomiale avec n expériences (n clients) et proba de succès (le client effectue un achat) égale à p.
On peut donc dire que « sachant $(X = n)$, $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ », ce qui se formalise correctement comme :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ P_{(X=n)}(Y = k) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } \ 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 \ \text{ si } \ k > n \end{cases}$$

(ne pas oublier de mentionner les cas où la proba est nulle !)

2. Connaissant la loi conditionnelle :

$$\forall\, (n, k) \in \mathbb{N}^2,\ P\big((X = n) \cap (Y = k)\big) = P(X = n) \times P_{(X=n)}(Y = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} P_{(X=n)}(Y = k)$$

On distingue alors :

- Si $k > n$, $P\big((X = n) \cap (Y = k)\big) = 0$;
- Si $k \leqslant n$, $P\big((X = n) \cap (Y = k)\big) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!} \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$.

3. Par probas totales avec le système complet d'événements $\big((X = n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ($X(\Omega) = \mathbb{N}$ pour une loi de Poisson) : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\big((X = n) \cap (Y = k)\big) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \quad \text{(pour } n < k \text{ les termes de la somme sont nuls !)} \\
&= \frac{e^{-\lambda} p^k q^{-k}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} q^n \\
&= \frac{e^{-\lambda} p^k q^{-k}}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{m+k}}{m!} q^{m+k} \qquad \text{changement d'indice } m = n-k \\
&= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^m}{m!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda q} \\
&= \frac{e^{\lambda(q-1)}(\lambda p)^k}{k!} \\
P(Y = k) &= \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

et on reconnaît $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda p)$.

4. $X - Y$ est la différence entre le nombre de clients et le nombre de clients qui achètent (c'est donc ceux qui n'achètent pas !). Comme le nombre de clients varie dans $\mathbb{N}$ (loi de Poisson) on voit que $(X - Y)(\Omega) = \mathbb{N}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$: on s'intéresse à $P(X - Y = k)$. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\big((X = n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ donne :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}\big((\mathrm{X}=n)\cap(\mathrm{X}-\mathrm{Y}=k)\big)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}\big((\mathrm{X}=n)\cap(\mathrm{Y}=n-k)\big)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}=n)\times \mathrm{P}_{(\mathrm{X}=n)}(\mathrm{Y}=n-k)\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}=n)\times \mathrm{P}_{(\mathrm{X}=n)}(\mathrm{Y}=n-k) \quad \text{probas non nulles ssi } 0\leqslant n-k\leqslant n, \text{ soit } n\geqslant k\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\times\binom{n}{n-k}p^{n-k}q^k\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\times\binom{n}{k}p^{n-k}q^k
\end{aligned}$$

et on est ramené au calcul précédent dans lequel les rôles de p et q sont échangés. On peut donc conclure $\mathrm{X}-\mathrm{Y}\hookrightarrow \mathscr{G}(\lambda q)$.
NB : c'est raisonnable car $\mathrm{X}-\mathrm{Y}$ compte le nombre de clients qui n'achètent pas... donc il faut échanger «proba d'acheter» et «proba de ne pas acheter» pour transformer les calculs portant sur Y en ceux portant sur $\mathrm{X}-\mathrm{Y}$

5. (a) Y et $\mathrm{X}-\mathrm{Y}$ indépendantes ?? pas très intuitif ! Appliquons la définition de l'indépendance : pour tous $(k,n)\in\mathbb{N}^2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\big((\mathrm{Y}=k)\cap(\mathrm{X}-\mathrm{Y}=n)\big) &= \mathrm{P}\big((\mathrm{X}=n+k)\cap(\mathrm{Y}=k)\big)\\
&= \mathrm{P}_{(\mathrm{X}=n+k)}(\mathrm{Y}=k)\times \mathrm{P}(\mathrm{X}=n+k)\\
&= \binom{n+k}{k}p^k q^{n+k-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!} \quad \text{avec } k\leqslant n+k \text{ pour la proba conditionnelle}\\
&= \frac{(n+k)!}{n!k!}p^k q^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!}\\
&= \frac{1}{n!k!}p^k q^n e^{-\lambda}\lambda^{n+k} \quad \text{(on verra si on veut une expression plus simple...)}
\end{aligned}$$

et, avec $\mathrm{Y}\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda p)$ et $\mathrm{X}-\mathrm{Y}\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda q)$ (et $q=1-p$) :

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)\times \mathrm{P}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}=n) = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda q}\frac{(\lambda q)^n}{n!} = e^{-\lambda(p+q)}\frac{\lambda^k p^k\lambda^n q^n}{n!k!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+k}p^k q^n}{n!k!}$$

On constate bien que pour tous $(n,k)\in\mathbb{N}^2$, $\mathrm{P}\big((\mathrm{Y}=k)\cap(\mathrm{X}-\mathrm{Y}=n)\big)=\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)\times\mathrm{P}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}=n)$: Y et $\mathrm{X}-\mathrm{Y}$ sont bel et bien indépendantes.

(b) On part de cette dernière information : la covariance de Y et $\mathrm{X}-\mathrm{Y}$ est donc nulle. Or :

$$0=\mathrm{Cov}(\mathrm{Y},\mathrm{X}-\mathrm{Y})=\mathrm{Cov}(\mathrm{Y},\mathrm{X})-\mathrm{Cov}(\mathrm{Y},\mathrm{Y})=\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})-\mathrm{V}(\mathrm{Y})$$

et donc $\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})=\mathrm{V}(\mathrm{Y})=\lambda p$ (variance d'une loi de Poisson).
Puis :

$$\rho(\mathrm{X},\mathrm{Y})=\frac{\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}{\sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})}\sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{Y})}}=\frac{\lambda p}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda p}}=\sqrt{p}$$

9 EDHEC 2011

10 EML 2010

11 1. (a) On montre l'inclusion par la méthode usuelle :
Soit $\omega\in(\mathrm{X}\leqslant a)$ une issue appartenant à l'événement $(\mathrm{X}\leqslant a)$: on a donc $\mathrm{X}(\omega)\leqslant a$. Or $a\leqslant b$, donc on déduit que $\mathrm{X}(\omega)\leqslant b$ et donc $\omega\in(\mathrm{X}\leqslant b)$.
On a bien montré que $(\mathrm{X}\leqslant a)\subset(\mathrm{X}\leqslant b)$.

(b) Soient $x \leqslant y$ deux réels. On vient de voir que $(X \leqslant x) \subset (X \leqslant y)$; donc $P(X \leqslant x) \leqslant P(X \leqslant y)$; donc $F_X(x) \leqslant F_X(y)$. ceci est bien la propriété de croissance de F_X.

2. Soient $k \leqslant k'$ deux entiers.
Si $\omega \in A_{k'}$, le premier Pile arrive après le lancer k'. Comme $k' \geqslant k$ il arrive `a fortiori` après le lancer k ; ce qui donne $\omega \in A_k$.
On en déduit $A_{k'} \subset A_k$ et donc $P(A_{k'}) \leqslant P(A_k)$.
$k \leqslant k' \Rightarrow P(A_{k'}) \leqslant P(A_k)$: la suite $\big(P(A_k)\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

3. S'il n'y a plus de boules rouges à l'instant n, alors il n'y en a plus à l'instant $n+1$ (on ne remet jamais de boule rouge).
Si ω est une issue, on a donc $\omega \in (Y_n = 0) \Rightarrow Y_n(\omega) = 0 \boxed{\Rightarrow} Y_{n+1}(\omega) = 0 \Rightarrow \omega \in (Y_{n+1} = 0)$ ce qui donne $(Y_n = 0) \subset (Y_{n+1} = 0)$ puis $P(Y_n = 0) \leqslant P(Y_{n+1} = 0)$.
La suite $\big(P(Y_n = 0)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante. De plus comme ce sont des probas, cette suite est majorée par 1 ; elle est donc convergente.

NB : on voit que l'implication $(Y_n = 0) \subset Y_{n+1} = 0$ (encadrée) est celle qui permet d'affirmer l'inclusion entre événements.
En fait on vérifie que ce schéma est vérifié dans les 3 questions. Pour la première, l'implication qui sert est $X \leqslant a \Rightarrow X \leqslant b$; et pour la seconde c'est
« le premier pile arrive après le lancer k' » $\Rightarrow$ « le premier pile arrive après le lancer k » .

12 1. $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0,1\}$; l'égalité entre événements : $(\mathbb{1}_A = 1) = A$ (par définition) donne : $P(\mathbb{1}_A = 1) = P(A)$. On déduit de cela $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathscr{B}\big(P(A)\big)$.
D'après le cours on a alors $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ et $V(\mathbb{1}_A) = P(A)\big(1 - P(A)\big)$.

2. Pour montrer que deux variables aléatoires sont égales, on vérifie qu'elles prennent la même valeur sur les différentes issues : donc que, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega)$.

   - si $\omega \in A\cap B$, on a $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1$ par définition.
   Mais alors $\omega \in A$, ce qui donne $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$; et $\omega \in B$ donc $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$.
   On voit donc que $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega) = 1$.
   - si $\omega \notin A\cap B$, on a $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 0$; et ω n'appartient pas à A (auquel cas $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$) ou n'appartient pas à B (et alors $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$).
   Dans tous les cas $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega) = 0$.
   - Finalement, on a bien montré que $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega)$ quelque soit l'issue $\omega \in \Omega$: d'où l'égalité entre les deux variables aléatoires.

3. C'est le même principe : montrons que, pour tout $\omega \in \Omega$, $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = 1$.
Par propriété d'un système complet d'événements , on a $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, où cette union est disjointe ; de sorte qu'un ω donnée appartient à *un et un seul* des A_i. Si on le note A_{i_0}, on a
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = \mathbb{1}_{A_i}(\omega) + \cdots + \mathbb{1}_{A_{i_0}}(\omega) + \cdots + \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 0 + 0 + \ldots + 1 + 0 + \ldots + 0 = 1$$
Ceci montre la propriété désirée.

4. On a les égalités entre événements : $(\mathbb{1}_A = 1) = A$, $(\mathbb{1}_B = 1) = B$ (par définition de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$) ce qui donne directement
$$\big((\mathbb{1}_A = 1) \cap (\mathbb{1}_B = 1)\big) = A\cap B$$
et ce qu'il faut démontrer, en passant aux probas.
Si on suppose $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ indépendantes, on peut écrire
$$P\big((\mathbb{1}_A = 1) \cap (\mathbb{1}_B = 1)\big) = P(\mathbb{1}_A = 1) \times P(\mathbb{1}_B = 1)$$
ce qui s'écrit encore $P(A\cap B) = P(A)P(B)$: A et B sont donc indépendants.

5. Si A et B sont indépendants, on a $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ et donc avec le calcul précédent

$$P\big((\mathbb{1}_A = 1) \cap (\mathbb{1}_B = 1)\big) = P(\mathbb{1}_A = 1) \times P(\mathbb{1}_B = 1)$$

Ensuite, A et $\overline{B}$ sont indépendants, donc $P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$. Mais $\overline{B}$ est l'événement $(\mathbb{1}_B = 0)$!
Donc l'égalité précédente se réécrit

$$P\big((\mathbb{1}_A = 1) \cap (\mathbb{1}_B = 0)\big) = P(\mathbb{1}_A = 1) \times P(\mathbb{1}_B = 0)$$

En écrivant l'indépendance de $\overline{A}$ et B on a

$$P\big((\mathbb{1}_A = 0) \cap (\mathbb{1}_B = 1)\big) = P(\mathbb{1}_A = 0) \times P(\mathbb{1}_B = 1)$$

et avec celle de $\overline{A}$ et $\overline{B}$:

$$P\big((\mathbb{1}_A = 0) \cap (\mathbb{1}_B = 0)\big) = P(\mathbb{1}_A = 0) \times P(\mathbb{1}_B = 0)$$

Ainsi, **pour tous** $(i, j) \in \{0, 1\}^2$, $P\big((\mathbb{1}_A = i) \cap (\mathbb{1}_B = j)\big) = P(\mathbb{1}_A = i) \times P(\mathbb{1}_B = j)$: $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ sont bien indépendantes.

6. C'est assez similaire au cas de l'intersection : on prend une issue ω :

   - si $\omega \in A$ et $\omega \in B$, alors $\mathbb{1}_{A\cup B}(\omega) = 1$, $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$, $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$ et $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1$; et on voit alors que

   $$\mathbb{1}_{A\cup B}(\omega) = 1 \;\; ; \;\; \max(\mathbb{1}_A(\omega), \mathbb{1}_B(\omega)) = 1 \;\; ; \;\; \mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega) - \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1 + 1 - 1 = 1$$

   - si $\omega \in A$ et $\omega \notin B$, alors $\mathbb{1}_{A\cup B}(\omega) = 1$, $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$, $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$ et $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 0$; donc

   $$\mathbb{1}_{A\cup B}(\omega) = 1 \;\; ; \;\; \max(\mathbb{1}_A(\omega), \mathbb{1}_B(\omega)) = 1 \;\; ; \;\; \mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega) - \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1 + 0 - 0 = 1$$

   - si $\omega \notin A$ et $\omega \in B$, alors $\mathbb{1}_{A\cup B}(\omega) = 1$, $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$, $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$ et $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 0$; donc

   $$\mathbb{1}_{A\cup B}(\omega) = 1 \;\; ; \;\; \max(\mathbb{1}_A(\omega), \mathbb{1}_B(\omega)) = 1 \;\; ; \;\; \mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega) - \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 0 + 1 - 0 = 1$$

   - si $\omega \notin A$ et $\omega \notin B$, alors $\mathbb{1}_{A\cup B}(\omega) = 0$, $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$, $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$ et $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 0$; donc

   $$\mathbb{1}_{A\cup B}(\omega) = 0 \;\; ; \;\; \max(\mathbb{1}_A(\omega), \mathbb{1}_B(\omega)) = 0 \;\; ; \;\; \mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega) - \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 0 + 0 - 0 = 0$$

   et donc on a bien :

   $$\forall\, \omega \in \Omega,\; \mathbb{1}_{A\cup B}(\omega) = \max(\mathbb{1}_A(\omega), \mathbb{1}_B(\omega)) = \mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega) - \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega)$$

   d'où l'égalité recherchée au niveau des variables aléatoires.

13 (Adapté d'ESSEC 2 2016)

1. $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ donc $u_n = R_{n-1} - R_n$.
On écrit alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} n u_n &= \sum_{n=1}^{N} n(R_{n-1} - R_n) \\
&= \sum_{n=1}^{N} n R_{n-1} - \sum_{n=1}^{N} n R_n \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) R_n - \sum_{n=1}^{N} n R_n \quad \text{(chgt d'indice } n = n+1 \text{ dans la première)} \\
&= R_0 - N R_N + \sum_{n=1}^{N-1} \big((n+1) - n\big) R_n \quad \text{(fusion des 2 sommes aux termes de bord près)} \\
&= R_0 + \sum_{n=1}^{N-1} R_n - N R_N \\
\sum_{n=1}^{N} n u_n &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n - N R_N \quad \text{On reconnaît } R_0 \text{ comme premier terme de la somme)}
\end{aligned}$$

2. (a) Pour $k \geqslant N$, $ku_k \geqslant Nu_k$ donc en sommant de $N+1$ à $+\infty$ (les sommes convergent bien) :

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} ku_k \geqslant N \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k$$

ce qui donne bien $NR_N \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} ku_k$. La positivité est claire.
La série $\sum ku_k$ étant supposée convergente, son reste partiel tend vers 0.On a donc $\lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} ku_k\right) = 0$ et par gendarmes $\lim_{N\to+\infty} Nu_N = 0$.

(b) On fait tendre $N \to +\infty$ dans l'égalité de la question 1.
$\sum_{n=1}^{N} nu_n \to \sum_{n=1}^{+\infty} nu_n$ (qui existe par hypothèse) ; $Nu_N \to 0$; donc $\sum_{n=0}^{N-1} R_n$ admet une limite $N \to +\infty$: la série $\sum R_N$ converge, et le passage à la limite donne, avec $Nu_N \to 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{k=1}^{+\infty} ku_k$$

3. (a) On repart de la question 1 : les R_n étant positifs

$$\sum_{n=1}^{N} nu_n = \sum_{n=0}^{N-1} R_n - NR_N \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} R_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} R_n$$

cette dernière somme infinie existant par hypothèse.
Ce dernier majorant est indépendant de N : les sommes partielles $\sum_{n=1}^{N} nu_n$ sont bien majorées.
Comme $\sum nu_n$ est une SATP cette majoration assure que la série converge.

(b) Encore avec $\sum_{n=1}^{N} nu_n = \sum_{n=0}^{N-1} R_n - NR_N$: les deux sommes ont une limite finie pour $N \to +\infty$, donc NR_N en a aussi une.
Se cette limite est non nulle (donc > 0, tout est positif) on peut écrire $NR_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \ell$ ou encore $R_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{N}$.
Mais ceci contredit la convergence de $\sum R_n$ par comparaison à une série de Riemann divergente !!
Donc $\ell = 0$, et $NR_N \to 0$.

(c) Comme en 2b le passage à la limite $N \to +\infty$ dans la question 1 donne l'égalité des sommes.

4. Posons $u_n = P(X = n)$. $\sum u_n$ converge (sa somme vaut 1) ; $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) = P(X \geqslant n+1)$.
X admet une esp ssi $\sum kP(X = k)$ cv (abs. mais tout est positif ici) ; donc ssi $\sum ku_k$ converge ; ceci équivaut donc à la convergence de $\sum R_n = \sum P(X \geqslant n+1)$ ce qui équivaut à la cv de $\sum P(X \leqslant n)$ (il suffit de décaler l'indice). Ceci établit l'équivalence demandée.
Dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{k=1}^{+\infty} ku_k$ s'écrit aussi $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X \geqslant n+1) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k)$ ou encore en décalant l'indice dans la première et en remarquant que le terme $k = 0$ de la seconde est nul :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k\in X(\Omega)} kP(X = k) = E(X)$$