ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2023-2024
Mathématiques

Devoir maison n°3bis
Corrigé

Exercice 1

1. **On définit la fonction f par :**

$$f(x) = \left(1+\frac{x}{2}\right)\ln(1+x) - x$$

(a) **Quel est l'ensemble de définition de f ? Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur cet ensemble de définition, que l'on notera $\mathscr{D}_f$.**

L'expression donnant $f(x)$ est définie dès que $1+x>0$; d'où $\mathscr{D}_f =]-1,+\infty[$.
Sur cet intervalle, f est $\mathscr{C}^\infty$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$.

(b) **Calculer $f'(x)$; montrer : $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f''(x) = \dfrac{x}{2(1+x)^2}$.**
Déterminer le signe de f', les variations de f et le signe de f sur $\mathscr{D}_f$.
En dérivant un produit pour le premier terme :

$$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f'(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x) + \left(1+\frac{x}{2}\right)\frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1}{2}\ln(1+x) + \frac{x+2}{2(1+x)} - 1$$

puis

$$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f''(x) = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2(1+x)^2} = \frac{1+x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2(1+x)^2} = \frac{x}{2(1+x)^2}$$

On en déduit les tableaux de variation et de signe suivants :

x	-1		0		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$\searrow$	0	$\nearrow$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$		$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$f(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

(c) **Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f''(x) \leqslant \dfrac{x}{2}$.**

On a $f''(x) = \dfrac{x}{2(1+x)^2}$ sur $\mathscr{D}_f$. Pour $x \geqslant 0$, $1+x \geqslant 1$ donc $(1+x)^2 \geqslant 1$, donc $\dfrac{1}{2(1+x)^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$; et en multipliant par $x \geqslant 0$ on trouve bien $f''(x) \leqslant \dfrac{x}{2}$.

(d) **En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x^3}{12}$.**

D'après le tableau de signes de f : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \geqslant 0$.
D'autre part : si x est positif, on a, pour tout $t \in [0,x]$, $f''(t) \leqslant \dfrac{t}{2}$; on peut donc intégrer cette inégalité sur $[0,x]$ et obtenir :

$$\int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$
$$f'(x) - f'(0) \leqslant \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^x$$
$$f'(x) \leqslant \frac{x^2}{4}$$

On intègre à nouveau l'inégalité $f'(t) \leqslant \frac{t^2}{4}$ sur $[0,x]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^x \frac{t^2}{4}\,\mathrm{d}t \\
f(x) - f(0) &\leqslant \left[\frac{t^3}{12}\right]_0^x \\
f(x) &\leqslant \frac{x^3}{12}
\end{aligned}$$

2. **On définit dans cette question la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}\right)$$

(a) **En calculant soigneusement $u_n - u_{n+1}$, démontrer que :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - u_{n+1} = nf\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a

$$u_n - u_{n+1} = \ln\left(\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}\right) - \ln\left(\frac{(n+1)!\,e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}\,\frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!\,e^{n+1}}\right)$$

On ne panique pas et on essaie de réorganiser ce gros quotient pour faire apparaître des simplifications :

$$\begin{aligned}
\frac{n!\,e^n(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{n^n\sqrt{n}(n+1)!\,e^{n+1}} &= \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{e^n}{e^{n+1}} \times \sqrt{\frac{n+1}{n}} \times (n+1) \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&= \frac{1}{(n+1)} \times \frac{1}{e} \times \sqrt{1+\frac{1}{n}} \times (n+1) \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \frac{1}{e} \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}
\end{aligned}$$

d'où

$$u_n - u_{n+1} = \ln\left(\frac{1}{e} \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}\right) = -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Par ailleurs, $nf\left(\frac{1}{n}\right) = n\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$: on obtient bien la même expression.

(b) **En déduire que la série $\sum(u_n - u_{n+1})$ est convergente.**
Cette série est donc aussi la série $\sum nf\left(\frac{1}{n}\right)$. C'est une série à termes positifs car f est positive sur $\mathbb{R}_+$; de plus on sait que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant \frac{x^3}{12}$; d'où en appliquant en $x = \frac{1}{n}$ (qui est bien positif) puis en multipliant par $n > 0$:

$$nf\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{12n^2}$$

Le terme général de la série qui nous occupe est donc majoré par le terme général d'une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$) donc par comparaison de SATP, $\sum(u_n - u_{n+1})$ converge.

(c) **Quelle est la nature de la suite (u_n) ?**
Classiquement, une suite a même comportement que sa série téléscopique associée, donc on vient de voir la convergence.
Si on veut le redémontrer : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un téléscopage donne

$$u_0 - u_n = \sum_{k=0}^{n-1}(u_k - u_{k+1})$$

Le terme de droite admet une limite finie pour $n \to +\infty$ car ce sont les sommes partielles d'une série convergente ; donc celui de gauche aussi, et (u_n) admet bien une limite finie.

(d) **En déduire qu'il existe une constante** $C > 0$ **(qu'on ne cherchera pas à calculer) telle que :**

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}$$

Notons donc $a = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. On a donc par passage à l'exponentielle :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}} = e^a$$

On note alors $C = e^a > 0$; on peut reformuler cette dernière limite avec l'équivalent :

$$\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} C$$

et après multiplication par $\dfrac{n^n\sqrt{n}}{e^n}$ (opération légitime sur les équivalents) on arrive bien à

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\frac{n^n\sqrt{n}}{e^n}$$

Exercice 2

On admet le Théorème de Cesàro :

> Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$; on a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \ell$.

Dans toute la suite, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **de réels positifs telle que la série de terme général** x_n **converge. Pour tout entier naturel** n **non nul, on note :**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\,, \quad T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} S_k\,, \quad y_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i x_i$$

1. (a) **Montrer que :** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)x_i$.
   Indication : on pourra utiliser une formule permettant d'intervertir une somme double.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} y_k &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{k} i x_i\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{i x_i}{k(k+1)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{i x_i}{k(k+1)} \quad \text{par interversion des sommes}\\
&= \sum_{i=1}^{n} i x_i \sum_{k=i}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} i x_i\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{n+1}\right) \quad \text{par téléscopage}\\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} i x_i\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)x_i
\end{aligned}$$

   En déduire ensuite que, pour tout n **de** $\mathbb{N}^*$**, on a :** $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k$.

   Par ailleurs :

$$
\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{T}_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{S}_k \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n} x_i\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{k=i}^{n} 1\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i(n+1-i)
\end{aligned}
$$

et on obtient bien la même expression ; ce qui montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$$

(b) **En utilisant le résultat admis au début de ce problème, établir que la série de terme général y_n converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.**

Par définition d'une série convergente : $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$; on obtient alors d'après Cesàro : $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{T}_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. Or les T_n sont les sommes partielles de la série $\sum y_k$; ce qui montre que :

$$\text{La série } \sum y_k \text{ converge, et } \sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$$

2. **Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel n non nul : $z_n = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$.**

On se propose de montrer que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

(a) **On admet que si une fonction f est concave sur un intervalle I, alors, pour tout entier naturel n non nul, on a :**

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathrm{I}^n,\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \leqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

Montrer que ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n,\ \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$\forall x > 0,\ \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, donc ln est concave sur $]0, +\infty[$. On peut alors appliquer l'inégalité de concavité aux réels a_k *en supposant que ceux-ci sont* > 0 *:*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(a_k) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

En utilisant les propriétés du ln :

$$\ln\left(\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

et par croissance de la fonction exponentielle :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Si maintenant l'un des a_i est nul, $\prod_{k=1}^{n} a_k = 0$ et $\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant 0$, et l'inégalité reste vraie.

On a donc bien :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\,(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}_+^n,\ \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

(b) **Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :** $z_n = \dfrac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^{n} kx_k\right)^{1/n}$**.**

En déduire que : $z_n \leqslant \dfrac{n+1}{(n!)^{1/n}}\, y_n$**.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^{n} kx_k\right)^{1/n} &= \frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^{1/n}\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}\\
&= \frac{1}{(n!)^{1/n}}\,(n!)^{1/n}\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}\\
&= \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} = z_n
\end{aligned}$$

On applique alors l'inégalité de la question 2a aux réels (positifs) $a_k = kx_k$:

$$\begin{aligned}
z_n &= \frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^{n} kx_k\right)^{1/n}\\
&\leqslant \frac{1}{(n!)^{1/n}}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kx_k\\
&\leqslant \frac{1}{n(n!)^{1/n}}\,n(n+1)\,y_n\\
z_n &\leqslant \frac{n+1}{(n!)^{1/n}}\,y_n
\end{aligned}$$

(c) **Montrer que, pour tout réel x positif, on a :** $\ln(1+x) \leqslant x$**.**
Question classique en étudiant la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$.

(d) **En déduire que :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e$**.**

En appliquant la question précédente à $x = \dfrac{1}{n} \geqslant 0$: $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$; d'où $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant 1$ ce qui s'écrit encore $\ln\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right) \leqslant 1$; et enfin en passant à l'exponentielle (fonction croissante) :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e^1 = e$$

(e) **Calculer** $\sum_{k=1}^{n} k\big(\ln(k+1) - \ln(k)\big)$ **(on fera apparaître une somme téléscopique)**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) - \ln(k+1)\\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \big((k+1)\ln(k+1) - k\ln(k)\big)}_{\text{téléscopique}} - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)\\
&= (n+1)\ln(n+1) - \ln(1) - \ln\left(\prod_{k=1}^{n}(k+1)\right)\\
\sum_{k=1}^{n} k(\ln(k+1) - \ln(k)) &= (n+1)\ln(n+1) - \ln\big((n+1)!\big)
\end{aligned}$$

(f) **En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\dfrac{(n+1)^n}{n!} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$.**

Montrer enfin que la série de terme général z_n converge et que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

On prend le ln du terme de droite :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right) &= \sum_{k=1}^{n} k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\big(\ln(k+1)-\ln(k)\big) \\
&= (n+1)\ln(n+1) - \ln\big((n+1)!\big) \quad \text{d'après le calcul précédent} \\
&= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\right) \\
\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right) &= \ln\left(\frac{(n+1)^n}{n!}\right) \quad \text{(un } (n+1) \text{ se simplifie)}
\end{aligned}$$

d'où en passant à l'exp :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

On a vu que : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant z_n \leqslant \dfrac{n+1}{(n!)^{1/n}}\, y_n$; et avec le calcul précédent :

$$\frac{(n+1)^n}{n!} = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} e\right)^{1/n} = \left(e^n\right)^{1/n} = e$$

Finalement : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant z_n\leqslant e\, y_n$.
La série $\sum y_n$ converge (question 1b), donc par comparaison de séries **à termes positifs**, la série $\sum z_n$ converge également. et en sommant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = e\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$$

(la dernière égalité vient aussi de 1b).

3. (a) **Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout k élément de $[\![1, n-1]\!]$, on a :**

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

Ce sont des calculs type comparaison série-intégrale. Soient $n\geqslant 2$ et $k\in[\![1,n-1]\!]$; la fonction ln est croissante sur $\left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$, donc

$$\forall\, x\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right],\ \ln\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant \ln(x)\leqslant \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

On intègre cet encadrement sur $\left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$ (les bornes sont dans le bon sens) :

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

(b) **Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{1/n}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x$ et en déduire que :**

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ -1+\frac{1}{n}\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}.$$

On se souvient que $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$; donc

$$\int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[x\ln(x) - x\right]_{1/n}^{1} = \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - 1 + \frac{\ln(n)}{n}$$

On a vu (partie gauche de l'encadrement de la question précédente) :

$$\forall\, k \in [\![1, n-1]\!],\ \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

En sommant cette inégalité pour k allant de 1 à $n-1$ on obtient (avec une relation de Chasles) :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}$$

Enfin on peut rajouter le terme $k = n$ (qui donne $\ln(n/n) = 0$) dans la somme de gauche et on obtient bien :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}$$

ce qui donne l'inégalité de droite.

On somme ensuite la partie droite de l'encadrement pour $k = 1 \ldots n-1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln(x)\,\mathrm{d}x &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right) \\
\int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \\
\frac{1}{n} - 1 + \frac{\ln(n)}{n} &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \underbrace{- \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)}_{=+\ln(n)/n} \\
\frac{1}{n} - 1 &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

ce qui fournit l'inégalité de gauche.

(c) **Déterminer** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)\right)$**, puis établir que :** $(n!)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e}$**.**

L'encadrement de la question précédente et un théorème des gendarmes donnent directement (avec $\frac{\ln(n)}{n} \to 0$ par croissances comparées) :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = -1$$

Or :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \ln\left(\frac{(n!)^{1/n}}{n}\right)$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{(n!)^{1/n}}{n}\right) = -1$, d'où en passant à l'exponentielle :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

d'où

$$(n!)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e}$$