CB 1.1
Corrigé

Exercice 1

1. On a clairement

$$\mathcal{E} = \{aA + bB + cC \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$$

$\boxed{\mathcal{E} = \text{Vect}(A,B,C)}$ donc $\mathcal{E}$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

et (A,B,C) est génératrice de $\mathcal{E}$

De plus : $aA+bB+cC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow a = b = c = 0$

donc (A,B,C) est libre.

$\Rightarrow \boxed{(A,B,C) \text{ est une base de } \mathcal{E}}$, et $\dim \mathcal{E} = \text{Card}(A,B,C)$
$= 3$.

2). Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$

$N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$

Alors $MN = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab'+bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix}$. Le coeff en bas à gauche étant nul : $MN \in \mathcal{E}$.

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E} \text{ est stable par multiplication}}$

3) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ est inversible ssi $ac - 0 \times b \neq 0$

$\iff ac \neq 0$

Dans ce cas : $\boxed{M^{-1} = \dfrac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & -b \\ \underline{\underline{0}} & a \end{pmatrix} \in \mathcal{E}.}$

4). $T = A + B + C \in \mathcal{E}$.

Si $M \in \mathcal{E}$, d'après la question 2, $f(M) = TMT \in \mathcal{E}$.

De plus : $\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\alpha M + N) &= T(\alpha M + N)T \\ &= \alpha TMT + TNT \\ &= \alpha f(M) + f(N) \end{aligned}$$

d'où : $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathcal{E})}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$TAT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{A + B}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$TBT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{B}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$TCT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B + C$

d'où $\boxed{\mathrm{Mat}(f, \{A, B, C\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = F}$

6. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$FX = X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ x+y+z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff x+y+z = y$$

$$\iff x + z = 0$$

d'où $FX = X \iff X \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

et $\boxed{\text{l'ensemble des solut° est } \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$

7. Soit $M \in \mathcal{E}$. On a $f(M) = M \iff FX = X$ où X est la colonne des coordonnées de M ds $\{A, B, C\}$.

D'après q.6 : l'ensemble des solut° de $f(M) = M$ est $\boxed{\mathrm{Vect}(A - C, B)}$

8. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H^2 = 0$ (matrice nulle)

d'où : $\boxed{\forall n \geq 2,\ H^n = H^2 \times H^{n-2} = 0}$

9. $\forall a \in \mathbb{R}$, I et aH commutent donc on peut appliquer le binôme de Newton.

$$\forall n \in \mathbb{N} : (aH + I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aH)^k I^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k H^k$$

Si $n \geq 1$, on coupe cette somme après $k = 1$ car $H^k = 0$ si $k \geq 2$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \ (aH + I)^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k H^k = \underline{\underline{I + naH}}$$

et pour $n = 0$ $(I + aH)^0 = I$ et le résultat précédent est encore valable.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ (I + aH)^n = I + naH}$$

10. En notant que $F = I + H$ il suffit d'appliquer 9°) pour $a = 1$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ F^n = (I + H)^n = I + nH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

11. Sans autre piste évidente, on peut avoir l'idée de chercher G sous la forme $I + aH$. Si $G = I + aH$, $G^3 = I + 3aH$; donc pour $a = 1/3$ on a bien $G^3 = F$ et $F = I + H$

$$\boxed{G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ convient}}$$

et si on note $\underline{g \in \mathcal{L}(\mathcal{E})}$ tq $\underline{\mathrm{Mat}(g, \{A, B, C\}) = G}$

$G^3 = F$ donne bien $\boxed{\underline{g^3 = f}}$

Exercice 2

1) D'après les contraintes présentées :

* id_Acteur doit être une clé primaire (identifiant les acteurs de manière unique)

* id_film doit être une clé primaire

* Acteur_principal (dans la table des Films) doit être une clé étrangère, pointant vers la clé primaire id_Acteur

2) On peut proposer :

```
CREATE TABLE Films(
(primaire) → id_film INTEGER PRIMARY KEY,
             Titre TEXT,
(étrangère) → FOREIGN KEY Acteur_Principal REFERENCES Acteurs.id_Acteur,
             Année INTEGER,
             Durée INTEGER,
             Pays_Film TEXT )
```

3) SELECT Titre FROM Films WHERE Pays = 'France'
AND Année <= 1980

4) SELECT AVG(Durée) FROM Films WHERE Pays = 'Finlande'

5) SELECT Titre, Durée FROM Films
WHERE Pays = 'France' OR Pays = 'Japon'
ORDER BY Année.

6) On joint en égalant la clé primaire et la clé étrangère qui pointe vers elle :

$\boxed{\text{Acteurs INNER JOIN Films ON Acteurs.id\_acteur = Films.Acteur\_principal}}$

↑

désigné par "J"

7) Il n'y a pas d'ambiguïté sur les noms des colonnes : on peut désigner les champs par leur nom seul, et omettre la syntaxe "Table.Champ".

SELECT Titre, Année FROM J
WHERE Pays_Acteur = 'France' AND Pays_Film = 'Finlande'

8) SELECT COUNT(Titre) FROM J WHERE Sexe = 'F'

9) Il n'y a pas de clé primaire dans J....

10) .... car ses deux colonnes sont des clés étrangères !

Acteur pointe vers Acteurs.id_Acteur
Film ______ Films.id_Film.

11. La jointure à opérer est cette fois

```
JoueDans INNER JOIN Acteurs ON Acteurs.id_Acteur = JoueDans.Acteur
         INNER JOIN Films ON Films.id_Film = JoueDans.Film
```

↑

Bloc de code désigné par J'

et la requête est :

```
SELECT DISTINCT Nom FROM J' WHERE Pays_Film = 'France'.
```

← pour éviter les répétitions, si un acteur joue dans plusieurs films français.

Exercice 3 (ECRICOME 2017)

Partie A

1) On tire avec remise, donc pour $\forall k \in \mathbb{N}^*$, l'urne contient les boules 1 à n.

On a donc $\boxed{X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])}$

et d'après le cours : $\boxed{E(X_k) = \frac{n+1}{2}}$

2a. La somme des boules tirées peut dépasser n dès le premier tirage (si on tire la boule n), ou "au pire" on peut attendre n tirages, si on tire n fois la boule 1.

On a donc $\boxed{T_n(\Omega) = [\![1,n]\!]}$

2b. Comme dit, $T_n = 1$ ssi on tire la boule n au 1^{er} tirage.

Ainsi : $\boxed{P(T_n = 1) = P(X_1 = n) = \frac{1}{n}}$ (car $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$)

2c. On a $(T_n = n)$ ssi il faut attendre le n-ième tirage pour que la somme des boules tirées dépasse n.

On voit en fait que ceci équivaut à ce que les $\underline{\underline{(n-1)}}$ premières boules tirées soient 1 : la n-ième peut ensuite valoir n'importe quoi.

On a donc $(T_n = n) = (X_1 = 1) \cap \dots \cap (X_{n-1} = 1)$

et par <u>indépendance</u> des tirages successifs :

$$P(T_n = n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (X_i = 1)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} \underbrace{P(X_i = 1)}_{= 1/n}$$

$$\boxed{P(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}}$$

3. Pour $n = 2$: * $\underline{T_2(\Omega) = \{1, 2\}}$

* et d'après ce qui précède : $\underline{P(T_2 = 1) = \frac{1}{2}}$ (2b)

$\underline{P(T_2 = 2) = 1 - \frac{1}{2} = 1/2}$

4) Pour $n = 3$: $T_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

$$P(T_3 = 1) = 1/3 \quad (2b)$$

$$P(T_3 = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad (2c)$$

d'où $P(T_3 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{9-3-1}{9} = \underline{\underline{\frac{5}{9}}}$

$$E(T_3) = 1 . P(T_3 = 1) + 2 . P(T_3 = 2) + 3\, P(T_3 = 3)$$

$$= 1/3 + 2 . 5/9 + 3 . 1/9 = \frac{3 + 10 + 3}{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(T_3) = \frac{16}{9}}$$

5. On utilise le package numpy.random pour générer les tirages :

rd.randint (1, n+1) renvoie un elt aléatoire de $[\![1, n]\!]$ équiprobable.

On peut ainsi compléter la fonction,

```
def T(n):
    S=0          # somme des boules tirées
    y=0          # nb de boules tirées
    while S<n:
        tirage = rd.randint(1,n+1)
        S= S+ tirage
        y = y+1
    return y
```

Ainsi le y renvoyé est le numéro du premier tirage pour lequel la somme des boules tirées dépasse n : c'est bien T_n.

Partie B

6. $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ est la somme des k premières boules tirées.

Comme $X_i(\Omega) = [\![1, n]\!]$, on a $\boxed{S_k(\Omega) = [\![k, nk]\!]}$

au pire on tire k boules (1) — au mieux on tire k boules (n).

(NB : en tte rigueur il faudrait montrer que $\forall j \in [\![k, nk]\!]$ est atteignable ... c'est fastidieux)

6

7.a. $S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} X_i = \sum_{i=1}^{k} X_i + X_{k+1}$

$$\Rightarrow \boxed{S_{k+1} = S_k + X_{k+1}}$$

(en français : la somme des $k+1$ premières boules vaut [la somme des k premières] + [la $(k+1)$-ème].)

7b. D'après l'univers-image vu en 6 :

$\left((S_k = j)\right)_{j \in [\![k, nk]\!]}$ est un SCE.

On écrit alors les probas totales

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!], \quad P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{nk} P\left((S_{k+1} = i) \cap (S_k = j)\right)$$

$$= \sum_{j=k}^{nk} P\left((S_k + X_{k+1} = i) \cap (S_k = j)\right)$$

$$= \sum_{j=k}^{nk} P\left((S_k = j) \cap \underbrace{(X_{k+1} = i-j)}_{\text{év}^t \text{ impossible si } j \geq i}\right)$$

(car alors $X_{k+1} \leq 0$!)

$\Rightarrow$ la somme s'arrête à $j = i-1$

$$\Rightarrow \forall i \in [\![k+1, n]\!], \ P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} P\left((S_k = j) \cap (X_{k+1} = i-j)\right)$$

Or les X_i sont indép, donc $S_k = X_1 + \dots + X_k$ et X_{k+1} sont indép.

(lemme des coalitions !!)

et on peut donc "couper la proba"

$$P(S_{k+1}=i) = \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k=j)\, P(X_{k+1}=i-j)$$

Sur le domaine de sommat°:

$$k \leq j \leq i-1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-i \leq -j \leq -k$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{1}} \leq i-j \leq \underbrace{i-k \leq n-k}_{i \leq n \text{ car } i \in [\![k,n]\!]} \leq \underline{\underline{n}}$$

donc $P(X_{k+1}=i-j) = \frac{1}{n}$ (équiproba).

Finalement: $\boxed{\forall i \in [\![k+1,n]\!],\ P(S_{k+1}=i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k=j)}$

(ouf! utilisat° de la FPT très classique, mais beaucoup de détails à régler derrière... question pas facile)

8a. La formule du triangle de Pascal donne:

$$\boxed{\binom{j-1}{k-1}+\binom{j-1}{k}=\binom{j}{k}}$$

(aussi pour $j=k$ avec la convent° $\binom{k-1}{k}=0$)

8b... formule qu'on réécrit $\binom{j-1}{k-1}=\binom{j}{k}-\binom{j-1}{k}$ pour sommer "téléscopiquement"

$$\sum_{j=k}^{i-1}\binom{j-1}{k-1} = \sum_{j=k}^{i-1}\left(\binom{j}{k}-\binom{j-1}{k}\right) = \binom{i-1}{k} - \underbrace{\binom{k-1}{k}}_{=0} = \underline{\underline{\binom{i-1}{k}}}$$

8c. On procède par récurrence sur $\underbrace{k \in [\![1,n]\!]}_{\triangle}$

• Init : $\mathcal{P}(1)$ s'écrit :

" $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(S_1 = i) = \frac{1}{n}\binom{i-1}{0}$ " (remplacer "k" par 1 partout !)

Or $S_1 = X_1$ et $\frac{1}{n}\binom{i-1}{0} = \frac{1}{n}$: $\mathcal{P}(1)$ s'écrit en fait

" $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$, ce qui est vrai.

• Hérédité. Supposons, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$

" $\forall i \in [\![k,n]\!]$, $P(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1}$ " Montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

Soit alors $i \in [\![\underline{k+1}, n]\!]$

7b donne $P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j)$ (avec le même domaine de validité, $i \in [\![k+1,n]\!]$!!)

et comme $j \in [\![k, i-1]\!] \subset [\![k,n]\!]$:

$$P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} \underbrace{\frac{1}{n^k}\binom{j-1}{k-1}}_{\text{d'après } \mathcal{P}(k)}$$

$$= \frac{1}{n^{k+1}}\sum_{j=k}^{i-1}\binom{j-1}{k-1}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![k+1,n]\!],\ P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{k}}$$ d'après 8b.

ce qui est exactement $\mathcal{P}(k+1)$!!

On a donc l'hérédité ; puis, la propriété par récurrence

[NB : grosse question ici aussi. Tout est prévu pour que ça se passe bien — utilisat° de 7b et 8b — mais il faut être précis sur les quantificateurs !].

9a. On a $T_n > k$ ssi le rang où la somme des tirages dépasse est $> k$

ssi au k-ième tirage, ~~la~~ la somme n'a pas dépassé n

ssi $S_k \leq n-1$

d'où $\boxed{(T_n > k) = (S_k \leq n-1)}$

9b. On en déduit :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(T_n > k) = P(S_k \leq n-1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} P(S_k = i)$$

$$= \sum_{i=k}^{n-1} P(S_k = i) \quad \text{car } S_k < k \text{ est impossible}$$

$$= \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \quad \text{(formule 8c valable pour } i \in [\![k, n-1]\!]\text{)}$$

$$= \frac{1}{n^k} \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i-1}{k-1}$$

$$\boxed{= \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}}$$

avec 8b, dans laquelle on remplace "i" par "n" et "j" par "i"

10. $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$

donc $E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} k\, P(T_n = k)$.

On force alors l'apparit° des $P(T_n > k)$:

$$P(T_n = k) = P(T_n > k-1) - P(T_n > k).$$

d'où $E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} k\left(P(T_n > k-1) - P(T_n > k) \right)$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k\, P(T_n > k-1)}_{\substack{\text{shift d'indice} \\ \text{“}k-1 = k\text{”}}} - \sum_{k=1}^{n} k\, P(T_n > k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, P(T_n > k) - \sum_{k=1}^{n} k\, P(T_n > k)$$

On fusionne alors les 2 sommes, mais les termes de bord $k=0$ et $k=n$ sont récalcitrants :

$$E(T_n) = \underbrace{1 \times P(T_n > 0)}_{\substack{\text{terme } k=0 \\ \text{de la première}}} + \sum_{k=1}^{n-1} \left((k+1) - k\right) P(T_n > k) - \underbrace{n\, P(T_n > n)}_{\substack{\text{terme } k=n \\ \text{de la seconde}}}$$

avec $P(T_n > 0) = 1$
et $P(T_n > n) = 0$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} P(T_n > k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k)$$

et encore avec
$1 = P(T_n > 0)$
qu'on remet alors dans la somme

On utilise alors 9b :

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} \qquad \dots \text{binôme} \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-1-k}$$

$$\boxed{E(T_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}}$$

11. Gros classique ici !

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \exp\left((n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

(Tous les $\sim$ sont des $\underset{n\to+\infty}{\sim}$)

On $\frac{1}{n} \to 0$ donc $\underbrace{(n-1)}_{\sim n}\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\sim 1/n} \sim n \times \frac{1}{n} = 1$

puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$

et enfin $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \exp(1)}$

Partie C

NB : ici exemple typique où on peut se dispenser de le redémontrer !

12. Avec l'équivalent classique

$$P(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^k}\frac{(n-1)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^k}\cdot\frac{n^k}{k!}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k!}$$

d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n > k) = \frac{1}{k!}}$

Comme $P(T_n = k) = P(T_n > k-1) - P(T_n > k)$

$$\lim_{n\to+\infty} P(T_n=k) = \lim_{n\to+\infty} P(T_n > k-1) - \lim_{n\to+\infty} P(T_n > k)$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \boxed{\frac{k-1}{k!}}$$

(NB : pour $k=1$, $k-1=0$ et le pt précédent ne s'applique pas tout seul

... mais $P(T_n > 0) = 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} P(T_n > 0) = 1 = \frac{1}{0!}$

donc la 1° partie de 12°) est encore vraie pour $k=0$).

13. Réfléchissons un bon coup pour savoir ce que fait cette fct° mystère :

* elle initialise $L = [\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{8 \text{ composants}}]$

* elle tire 10000 valeurs de $T(n)$; si la valeur tirée est $k \leq 8$ elle incrémente la k-ième composante de la liste L

* à la fin, on renvoie $L/10000$

Ainsi $\boxed{\text{la } k\text{-ième composante de mystere}(n) \text{ est la fréquence d'apparit° de } T_n = k \text{ sur } 10000 \text{ tirages}}$ ($\underbrace{\text{la } k\text{-ième composante}}_{L[k-1]}$)

On définit ensuite • expe : liste construite comme ci-dessus pour une certaine valeur de N

• theo : la liste des $\frac{k-1}{k!}$ pour $k \in \{1, 2, \dots, 8\}$

C'est donc en fait la "loi limite"

theo : $\left[\lim_{n \to +\infty} P(T_n = 1), \lim_{n \to +\infty} P(T_n = 2), \dots, \lim_{n \to +\infty} P(T_n = 8) \right]$

On plotte enfin :

* les barres verticales : composants de "expe"
* les points : composants de "theo".

On interprète de la manière suivante :

Sur un grand nombre (10000) expériences, la fréquence d'apparit° de $(T_n = k)$ est 1 approx de $P(T_n = k)$

Ainsi, expe donne un approx de $[P(T_n = 1), \dots, P(T_n = 8)]$

et on remarque que cette approx tend, pour $N \to +\infty$, vers la loi "theo"

Ceci illustre donc la propriété $\lim_{N \to +\infty} P(T_N = k) = \frac{k-1}{k!}$ pour les "premières" valeurs de k

Exercice 4

1) $u_0 = (1+1) = 2$

$u_1 = (1+1)(1+\frac{1}{2}) = 2 \times \frac{3}{2} = 3$

$u_2 = (1+1)(1+1/2)(1+1/4) = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$

2) On construit le produit terme à terme.

```
u = 2
for k in range(1, 51):
    u = u * (1 + 1/(2**k))
print(u)
```

3a. $\forall k \in [\![1, n]\!]$, on a $\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \geq 1$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times \underbrace{\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)}_{\geq 1} \geq 2$

3b. En isolant le dernier terme :

$$u_{n+1} = \left(\prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

d'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$ et comme (u_n) est à termes > 0 (3a.)

on en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$

4a. Tarte à la crème et points assurés.

$f : x \mapsto \ln(1+x) - x$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$

$\forall x > -1 \; , \; f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$

d'où le tableau

x	-1		0		$+\infty$
f'	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

avec $f(0) = 0$

On observe alors : $\forall x > -1 \; , \; f(x) \leq 0$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x > -1 \; , \; \ln(1+x) \leq x}$$

4b. $\forall n \in \mathbb{N} \; , \; \ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)\right)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

$$\ln(u_n) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$ (série géo. cv)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; , \; \ln(u_n) \leq 2}$

5) Par $\nearrow$ de l'exp : $\forall n \in \mathbb{N} \; , \; u_n \leq e^2$

(u_n) est croissante, majorée par e^2, donc cv vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Comme : $\forall n \in \mathbb{N} \; , \; 2 \leq u_n \leq e^2$, on obtient à la limite $n \to +\infty$: $\boxed{2 \leq \ell \leq e^2}$

6. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in [?, e^2]$, donc $\ell > 0$

d'où $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(\ell)$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$

on en déduit, pour $n \to +\infty$, la cv de la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$

et $\boxed{\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)}$

6b : Il suffit d'écrire :

$$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \ln(\ell) - \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)}$$

6c. En reprenant la majorat° de 4a :

$$\forall k \geq n+1, \quad \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$$

d'où $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{(1/2)^{n+1}}{1-1/2}$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(\ell/u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

De plus, les $\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ étant ≥ 1, il est clair d'après 6b que $\boxed{\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \geq 0}$

(ou encore : $(u_n)\nearrow$, $u_n \to l$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l$

$\Rightarrow$ —, $l/u_n \geq 1$

$\Rightarrow$ —, $\ln(l/u_n) \geq 0$)

6d. On vient de justifier que $\boxed{l - u_n \geqslant 0}$

De plus : $\ln\left(\frac{l}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow$ $l/u_n \leq \exp(1/2^n)$

$\Rightarrow$ $\frac{u_n}{l} \geqslant \exp(-1/2^n)$ par $\searrow$ de la fct inverse

$\Rightarrow$ $u_n \geqslant l \exp(-1/2^n)$ ($\times l$, avec $l > 0$)

$\Rightarrow$ $l - u_n \leq l - l \exp(-1/2^n)$

$\Rightarrow$ $\boxed{l - u_n \leq l\left(1 - \exp\left(-1/2^n\right)\right)}$

6e. On peut procéder comme en 4a et étudier $x \mapsto 1 - e^{-x} - x$ ...

ou appliquer 4a, à $x = -1 + e^{-t} > -1$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Alors : $\ln(1 + (-1 + e^{-t})) \leq -1 + e^{-t}$

$\Rightarrow$ $\ln(e^{-t}) \leq -1 + e^{-t}$

$\Rightarrow$ $-t \leq -1 + e^{-t}$) $\times(-1)$

$\Rightarrow$ $\underline{1 - e^{-t} \leq t}$

En reprenant 8d et en utilisant l'inégalité qu'on vient d'obtenir avec $x = 1/2^n$: $1 - e^{-1/2^n} \leq \frac{1}{2^n}$

en multipliant par $\ell > 0$

d'où $$0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1 - e^{-1/2^n}\right) \leq \ell \times \frac{1}{2^n}$$

$\sum_n \frac{\ell}{2^n}$ cv (série géo de raison $1/2 \in]-1,1[$)

donc par comparaison de SATP, $\boxed{\sum_n (\ell - u_n) \text{ converge}}$