Corrigé CB2 bis

Exercice 1

1. On commence par calculer $\mathrm{Ker}(A)$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z = 0 & \times m^2 \\ mx + \frac{1}{m}z = 0 & \\ m^2x + my = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - mL_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} my + z = 0 \\ mx + \frac{1}{m}z = 0 \\ my - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 0 & (L_1 \leftarrow L_1 - L_3) \\ y = 0 & (\text{en reportant ds } L_1 \text{ et } \underline{\text{AVEC } m \neq 0}) \\ x = 0 & (\text{encore avec } m \neq 0\text{, avec } L_2) \end{cases}$$

$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ d'où $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}}$: f est injectif

Comme f est un endomorphisme on en déduit qu'il est aussi bijectif ; et donc surjectif ; de sorte que $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3}$

2) f est un automorphisme donc $\boxed{A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_c) \text{ est inversible}}$

3.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 2 & 1/m \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{2I_3 + A}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$

4. $A^2 = 2I_3 + A$ s'écrit aussi $2I_3 = A^2 - A$

$$\Leftrightarrow \underline{I_3 = \frac{1}{2}(A^2 - A) = A\left(\frac{1}{2}(A - I_3)\right)}$$

ce qui montre que $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)}$

5. On calcule matriciell^t $f(u)$ (en travaillant ds $\mathcal{B}_c$)

$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ -m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où $\underline{f(u) = -u}$

$A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ m \end{pmatrix}$ d'où $\underline{f(v) = -v}$

$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 2m^2 \end{pmatrix}$ d'où $\underline{f(w) = 2w}$.

On a donc bien $\boxed{\mathrm{Mat}(f, \{u, v, w\}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

6. $p = \frac{1}{3}(f + Id)$ donc, en notant $P = \text{Mat}(p, \underline{\underline{\mathcal{B}}})$

$$P = \frac{1}{3}(D + I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et de même avec $Q = \text{Mat}(q, \mathcal{B})$

$$Q = -\frac{1}{3}(f - 2Id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie alors : $PQ = QP = 0_{M_3(\mathbb{R})}$; $P^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = P$

et de m̄ $Q^n = Q$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

d'où en traduisant sur les endomorphismes :

$$\boxed{\begin{gathered} p \circ q = q \circ p = \tilde{0} \\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ p^n = p, \text{ et } q^n = q \end{gathered}}$$

7. En manipulant toujours les matrices :

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = (-1)^n Q + 2^n P$$

d'où $\boxed{f^n = (-1)^n q + 2^n p}$

On injecte enfin les définitions de p et q :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = (-1)^n\left(-\frac{1}{3}(f-2Id)\right) + 2^n \times \frac{1}{3}(f+Id)$

$$\boxed{f^n = \frac{2^n-(-1)^n}{3} f + \frac{2(-1)^n+2^n}{3} Id}$$

Exercice 2

Partie A

1. • $X(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(X+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$

• $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X+1=k) = P(X=k-1) = q^{k-1}p$

On en déduit : $\boxed{X+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$

2) d'où $E(X+1) = \frac{1}{p} = E(X)+1$ $\Rightarrow$ $\boxed{E(X) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}}$

et $V(X+1) = \boxed{\frac{q}{p^2} = V(X)}$

par linéarité de l'espérance et invariance par translat° de la variance.

3) Il s'agit de simuler $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$; puis de renvoyer $X = Y-1$

On simule Y par temps d'attente du 1° succès de proba p :

```
def    simule_X(p):
    Y = 1
    while rd.random() > p :   # échec
        Y = Y+1
    return Y - 1
```

Partie B

4. À chaque tour, si $Z = n$, le programme doit simuler n tirages indépendants de X et renvoyer leur somme : cette somme est alors la nouvelle valeur de Z.
La 1° boucle compte le nb de tours de jeu ; et la seconde permet d'effectuer la somme des variables X_i tirées lors d'un tour

```
def simuleZ(n,p) :
    Z = 1    # initial^t, 1 jeton
    for i in range(n) :    # n tours de jeu
        S=0    # initialisat° somme
        for j in range (Z):              # construct° terme à
            S = S + simule_X(p)          # terme de ΣXi
        Z = S
    return Z
```

(NB : si $Z=0$ à 1 certain rang du programme, la boucle "for j in range(0)" n'effectue aucune opérat° ; et alors $Z = S = 0$.

5a. $u_0 = P(Z_0 = 0) = \underline{\underline{0}}$ car $Z_0 = 1$ de manière certaine

$u_1 = P(Z_1 = 0) = P(X = 0)$ car Z_1 suit la m̄ loi que X

$$\boxed{u_1 = p}$$

5b. Si le joueur n'a plus de jeton au tour n, il n'en a toujours pas au tour $n+1$!

d'où $(Z_n = 0) \subset (Z_{n+1} = 0)$

On en déduit $P(Z_n = 0) \leq P(Z_{n+1} = 0)$

$\Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$

$\Rightarrow$ $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$

Comme les u_n sont des probas, (u_n) est majorée par 1 ; et donc $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$

6.a. Sachant $(Z_1 = k)$ on a $Z_2 = 0$ ssi les k tirages au 2° tour donnent

car $Z_1 = k$

$X_1 = X_2 = \dots = X_k = 0$

On a $P_{(Z_1 = k)}(Z_2 = 0) = P_{(Z_1 = k)}(X_1 + \dots + X_k = 0)$

les X_i sont indépendants de Z_1 donc on obtient $P(X_1 + \dots + X_k = 0)$

et les X_k étant à valeurs ≥ 0 et indépendants

$$P(X_1+\dots+X_k=0) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k}(X_i=0)\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{k} P(X_i=0)$$
$$= \prod_{i=1}^{k} u_1$$
$$= u_1^k$$

$P(X_i=0) = P(X_1=0)$
$= P(Z_1=0)$
$= u_1$
(tous les X_i suivent la même loi !)

$$\Rightarrow \boxed{P_{(Z_1=k)}(Z_2=0) = u_1^k}$$

6b. Avec le résultat admis, on écrit les probas totales avec le SCE $((Z_1=k))_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad P(Z_{n+1}=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{(Z_1=k)}(Z_{n+1}=0)\times P(Z_1=k)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1=k)\,u_n^k$$

Or Z_1 suit la loi de X. $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(Z_1=k) = q^k p$

$$\text{d'où } P(Z_{n+1}=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k p\, u_n^k = p\sum_{k=0}^{+\infty}(q u_n)^k$$

$0<q<1$ et $0\leq u_n\leq 1$ (proba) donc $|q u_n|<1$ et on effectue la somme géométrique :

$$P(Z_{n+1} = 0) = p \cdot \frac{1}{1 - q u_n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{p}{1 - q u_n}}$$

7a. On a vu $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

En passant à la limite $\underset{n \to +\infty}{\text{ds}}$ le résultat précédent on a :

$$\ell = \frac{p}{1 - q\ell} \qquad (q \in]0,1[,\ \ell \in [0,1] \text{ donc } 1 - q\ell \neq 0)$$

~~Alors~~ $\cancel{(\ell - 1)(q\ell - p) = \left(\frac{p}{1-q\ell} - 1\right)(q\ell - p)}$

$$\cancel{= \frac{p - 1 + q\ell}{1 - q\ell} \times (q\ell - p)}$$

$$\cancel{= \frac{q\ell - q}{1 - q\ell}(q\ell - p)}$$

Cette équat° se réécrit $(1 - q\ell)\ell = p$

ou encore $\ell - q\ell^2 = p$

Par ailleurs : $(\ell - 1)(q\ell - p) = q\ell^2 - p\ell - q\ell + p$

$$= q\ell^2 - \underbrace{(p+q)}_{=1}\ell + p$$

$$= q\ell^2 - \ell + p = 0$$

et on a bien $\boxed{(\ell-1)(q\ell-p)=0}$

7b. $p \geqslant \frac{1}{2}$

D'après la quest° suivante : $\boxed{\ell = 1 \text{ ou } \ell = \frac{p}{q}}$

si $p \geqslant \frac{1}{2}$ on a $p \geqslant 1-p = q$ et donc $\frac{p}{q} \geqslant 1$.

Donc $\ell = 1$ ou $\ell \geqslant 1$; mais comme $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{P(Z_n = 0)}_{\in[0,1]}$

on a aussi $\ell \in [0,1]$

$\Rightarrow$ Finalement $\underline{\underline{\ell = 1}}$

et $\boxed{P(R) = \ell = 1}$

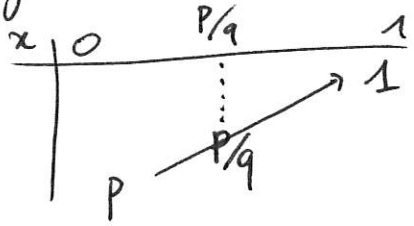
7c. Cette fois $p < 1/2$

On peut étudier la fonct° f tq $u_{n+1} = f(u_n)$ sur $[0,1]$

$f : x \mapsto \frac{p}{1-qx}$

f est définie et dérivable sur $[0,1]$; et $\forall x \in [0,1]$, $f'(x) = \frac{pq}{(1-qx)^2} > 0$

$\Rightarrow$ f est str. $\nearrow$ sur $[0,1]$; d'où le tableau.



$\left(f(1) = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1 \right.$

$f(p/q) = \frac{p}{1-p} = \frac{p}{q}$

On voit alors : $\forall x \in [0, p/q]$, $f(x) \in [0, p/q]$

Une récurrence donne alors :

$* \; u_0 = 0 \in [0, \frac{p}{q}]$ (ssi.)

$* \;$ si $u_n \in [0, p/q]$, $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, p/q]$ d'après l'étude.

Par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \in [0, \frac{p}{q}]}$

En passant à la limite on en déduit $0 \leq l \leq \frac{p}{q}$

Mais $p < 1/2 \Rightarrow q > p \Rightarrow \frac{p}{q} < 1$ et donc $\boxed{l < 1}$

7d. Pour que la machine soit rentable le casino va préférer que les joueurs soient ruinés avec la probabilité la + grande possible. Si $p \geq 1/2$, le joueur est ruiné presque sûrement après un nb assez grand de partis ; ce n'est pas le cas si $p < 1/2$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Le casino va préférer } p \geq \frac{1}{2}}$

Partie C

8. On a : $u_n = P(Z_n = 0)$ est la probabilité que le joueur n'ait plus de jeton au bout de n parties ; ce qui équivaut à dire qu'il a perdu tous ses jetons avant le temps n.

Ainsi $(Z_n = 0) = (T \leq n)$ (en termes d'événements)

et $\boxed{u_n = P(T \leq n)}$

On a ensuite : $(T \leq n) = (T = n) \cup (T \leq n-1)$

incompatible

d'où $P(T \leq n) = P(T = n) + P(T \leq n-1)$

$$\Rightarrow \quad P(T = n) = u_n - u_{n-1}$$

$$= (1 - v_n) - (1 - v_{n-1})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P(T = n) = v_{n-1} - v_n}$$

9. Calculons et utilisons la quest° précédente :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n P(T = n) = \sum_{n=1}^{N} n (v_{n-1} - v_n)$

$$= \sum_{n=1}^{N} n v_{n-1} - \sum_{n=1}^{N} n v_n$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) v_n - \sum_{n=1}^{N} n v_n$$

$$= v_0 - N v_N + \sum_{n=1}^{N-1} v_n$$

et en rentrant le v_0 dans la somme :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^{N} n P(T=n) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - N v_N}$$

10a. Pour $p = q = 1/2$, la relat° de récurrence de 6b s'écrit : $\forall n$, $u_{n+1} = \dfrac{1/2}{1 - 1/2 u_n} = \dfrac{1}{2 - u_n}$.

Montrons alors par récurrence que $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

* au rang $n=0$, on a $u_0 = 0 = \dfrac{0}{0+1}$ ✓
* si $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ alors $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \dfrac{n+1}{2(n+1) - n}$

$$= \frac{n+1}{n+2}$$

et on obtient bien la formule au rg $n+1$.

$$\Rightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \frac{n}{n+1}}$$

10b. T admet 1 espérance ssi $\sum n P(T=n)$ cv absolum^t ($\Leftrightarrow$ cv, tout est positif).

On passe par les sommes partielles

$$\sum_{n=1}^{N} n P(T=n) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - N v_N \quad ; \text{ avec } v_n = 1 - u_n$$

$$= 1 - \frac{n}{n+1}$$

$$\underline{v_n = \frac{1}{n+1}}$$

d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n P(T=n) = \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1}}_{H_N} - \underbrace{\frac{N}{N+1}}_{\xrightarrow[N\infty]{} 1}$

Pour $N \to +\infty$ on reconnaît H_N, les sommes partielles de la série <u>divergente</u> $\sum \frac{1}{n}$

On a donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} n P(T=n) = +\infty$

donc $\boxed{T \text{ n'admet pas d'espérance}}$

11. $p > \frac{1}{2}$.

11a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} = \dfrac{1-u_{n+1}}{\frac{p}{q} - u_{n+1}} = \dfrac{1 - \frac{p}{1-qu_n}}{\frac{p}{q} - \frac{p}{1-qu_n}}$ $\begin{matrix} \times q(1-qu_n) \\ \times q(1-qu_n) \end{matrix}$

$$= \frac{q(1-qu_n) - qp}{p(1-qu_n) - pq}$$

$q - qp = q(1-p) = q^2$
$p - pq = p(1-q) = p^2$

$$= \frac{q - qp - q^2 u_n}{p - pq - pq u_n}$$

$$= \frac{q^2 - q^2 u_n}{p^2 - pq u_n}$$

$$= \frac{q}{p}\left(\frac{q - qu_n}{p - qu_n}\right) \begin{matrix} \div q \\ \div q \end{matrix}$$

$$W_{n+1} = \frac{q}{p} \frac{1-u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$$

$\Rightarrow \boxed{W_{n+1} = \frac{q}{p} W_n}$

11b. la suite (w_n) est donc géométrique de raison $\frac{q}{p}$

Avec $w_0 = \dfrac{1-u_0}{\frac{p}{q}-u_0} = \dfrac{q}{p}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \left(\frac{q}{p}\right)^n = \underline{\underline{\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}}$

puis on retourne la relat° exprimant w_n en fct° de u_n :

$$w_n = \frac{1-u_n}{\frac{p}{q}-u_n} \Leftrightarrow \left(\frac{p}{q}-u_n\right)w_n = 1-u_n$$

$$\Leftrightarrow u_n - u_n w_n = 1 - \frac{p}{q} w_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1-p/q\, w_n}{1-w_n} \quad \left(w_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} \neq 1 \right)$$

d'où
$$\boxed{u_n = \frac{1-\frac{p}{q}\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}}$$

On a ensuite : $\forall n$, $u_n \in [0,1] \Rightarrow \boxed{v_n = 1-u_n \geq 0}$

et
$$v_n = 1-u_n = 1 - \frac{1-(q/p)^n}{1-(q/p)^{n+1}}$$

$$= \frac{(q/p)^n - (q/p)^{n+1}}{1-(q/p)^{n+1}}$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^n \frac{1-(q/p)}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} \quad (*)$$

On $p > 1/2 \Rightarrow \frac{q}{p} < 1 \Rightarrow \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} < \frac{q}{p}$

$$\Rightarrow 1 - \frac{q}{p} < 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} < 1$$

d'où on déduit : en reprenant (*) $\boxed{v_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n}$

11c. En reprenant la question 9

* $0 \leq v_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n$: $0 \leq \frac{q}{p} < 1$ donc $\sum \left(\frac{q}{p}\right)^n$ converge :

par comparaison de SATP $\boxed{\sum v_n \text{ converge}}$

* On a aussi $0 \leq n v_n \leq \underbrace{n \left(\frac{q}{p}\right)^n}_{\to 0}$ par croissances comparées.

$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \to +\infty} n v_n = 0}$ par gendarmes.

d'où $\lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} n P(T = n) \right)$ existe et est finie : $\boxed{T \text{ admet une espérance}}$

$$\forall N \in \mathbb{N}^* : \sum_{n=1}^{N} n P(T=n) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - \overbrace{N v_N}^{\geq 0}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N-1} v_n$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^n \quad (11b.)$$

d'où pour $N \to +\infty$: $$\boxed{E(T) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{q}{p}}}$$

12. Si $E(T)$ n'existe pas c'est que T peut prendre de "grandes" valeurs ; le joueur passera plus de temps devant les machines. Le casino a donc intérêt à préférer $p = 1/2$ à $p > 1/2$.

$\boxed{p = \frac{1}{2}}$ est donc la meilleure valeur à considérer.

Exercice 3

1. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto x^5 + nx - 1$

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = 5x^4 + n \geqslant 0$ (et > 0 si $x \neq 0$)

f_n est donc strict^t croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} x^5 + nx - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{x^5}_{\to -\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{n}{x^4} - \frac{1}{x^5}\right)}_{\to 1} = -\infty$$

2)

f_n est continue, strict^t croissante sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{R}$.

$0 \in \mathbb{R}$ donc $\exists!\, u_n \in \mathbb{R}$ tq $f_n(u_n) = 0$

$f_n(0) = -1 < 0$

$\Rightarrow f_n(0) < f_n(u_n)$

$\Rightarrow \underline{\underline{0 < u_n}}$ en composant par f_n^{-1}, st. $\nearrow$

$f_n(1) = n \geqslant 0$

$\Rightarrow f_n(u_n) \leq f_n(1)$

$\Rightarrow u_n \leq 1$ de même.

$\Rightarrow$ $\boxed{(u_n) \text{ est majorée par } 1}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(u_n) = u_n^5 + (n+1)u_n - 1 = u_n^5 + nu_n + u_n - 1$

mais on sait que $f_n(u_n) = 0 \Rightarrow u_n^5 + nu_n - 1 = 0$

$\Rightarrow f_{n+1}(u_n) = u_n \geqslant 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$

et par st. $\nearrow$ de f_{n+1}^{-1} : $\underline{\underline{u_n \geqslant u_{n+1}}}$

donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

4) Étant décroissante et minorée par 0, elle converge. : $\boxed{l = \lim_{n\to+\infty} u_n \text{ existe}}$

5. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad nu_n = 1 - u_n^5$$

$$\text{d'où} \lim_{n \to +\infty} nu_n = 1 - l^5.$$

si $l \neq 0$: $\lim_{n \to +\infty} nu_n = +\infty$; c'est absurde car cette limite vaut $1 - l^5$.

On en déduit $\lim_{n \to +\infty} nu_n = 1$ et $l = 0$

6. De $\lim_{n \to +\infty} nu_n = 1$ on peut écrire $nu_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

$\sum \frac{1}{n}$ dv ; par comparaison de SATP $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$

7. On a $v_n = u_n - \frac{1}{n}$

donc $nv_n = nu_n - 1$

et $\boxed{\lim_{n \to +\infty} nv_n = \lim_{n \to +\infty} (\underbrace{nu_n}_{\to 1} - 1) = 0}$

8. On injecte $u_n = v_n + \frac{1}{n}$ ds l'équat° définissant u_n :

$$u_n^5 + nu_n - 1 = 0 \quad \Rightarrow \left(v_n + \frac{1}{n}\right)^5 + n\left(v_n + \frac{1}{n}\right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(v_n + \frac{1}{n}\right)^5 + nv_n = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(nv_n + 1)^5}{n^5} + nv_n = 0$$

On obtient bien :

$$n v_n = -\frac{(1+n v_n)^5}{n^5}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n v_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+n v_n)^5 = 1$

donc $n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^5}$

et $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^6}}$