Concours Blanc n°1 - Maths 2bis

30/11/2023

Durée : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Soit m un réel fixé strictement positif, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$

On note $\mathbf{0}$ la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
Pour tout endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$, on pose $g^0 = \mathrm{Id}$ et, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $g^k = g \circ g^{k-1}$.

1. Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de l'endomorphisme f. f est-il injectif ? bijectif ? Déterminer l'image de f.
2. La matrice A est-elle inversible ?
3. Montrer que la matrice A^2 est une combinaison linéaire de I_3 et de A.
4. En déduire que $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A - I_3)$.
5. On admet que les vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on note $\mathscr{B}$:

   $$u = (1, -m, 0) \qquad v = (0, 1, -m) \qquad w = (1, m, m^2)$$

   Montrer que $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (on notera D cette matrice).
6. On note : $p = \dfrac{1}{3}(f + \mathrm{Id})$ et $q = -\dfrac{1}{3}(f - 2\mathrm{Id})$.
   Montrer les propriétés :
   - $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p^n = p$ et $q^n = q$.
   - $p \circ q = q \circ p = \widetilde{0}$ (où $\widetilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$).

   Indication : on pourra introduire les matrices de p et q dans la base $\mathscr{B}$.
7. Donner, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de f^n en fonction de p et q ; puis une expression de f^n en fonction de f et Id.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, p désigne un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.
Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.
On considère en particulier une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}([\mathrm{X} = k]) = q^k p = (1-p)^k p.$$

PARTIE A :

1. Montrer que la variable aléatoire $\mathrm{Y} = \mathrm{X} + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

2. En déduire que X admet une espérance et une variance, et préciser $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X})$.

3. Compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en entrée le réel p, elle renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simule_X(p):
    Y = ......
    while ......
        Y = Y+1
    return Y-1
```

PARTIE B :

Un casino a conçu une nouvelle machine à sous dont le fonctionnement est le suivant :

- le joueur introduit un nombre k de jetons de son choix ($k \in \mathbb{N}$), puis il appuie sur un bouton pour activer la machine ;

- si k est égal à zéro, alors la machine ne reverse aucun jeton au joueur ;

- si k est un entier supérieur ou égal à 1 , alors la machine définit k variables aléatoires $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_k$, toutes indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X étudiée dans la partie A, et reverse au joueur $(\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_k)$ jetons ;

- les fonctionnements de la machine à chaque activation sont indépendants les uns des autres et ne dépendent que du nombre de jetons introduits.

Le casino s'interroge sur la valeur à donner à p pour que la machine soit attractive pour le joueur, tout en étant rentable.
Le casino imagine alors le cas d'un joueur invétéré qui, avant chaque activation, place l'intégralité de ses jetons dans la machine, et continue de jouer encore et encore.
On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, Z_n la variable aléatoire égale au nombre de jetons dont dispose le joueur après n activations de la machine.
On suppose que le joueur commence avec un seul jeton ; ainsi $\mathrm{Z}_0 = 1$.
On remarque en particulier que Z_1 suit la même loi que X.

4. Compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en entrée un entier n de $\mathbb{N}$ et le réel p, elle simule l'expérience aléatoire et renvoie la valeur de Z_n.

   Cette fonction devra utiliser la fonction `simule_X`.

```python
def simule_Z(n,p):
    Z = 1
    for i in range(n):
        s = 0
        for j in range(Z):
            ......
        Z = ......
    return Z
```

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n la probabilité que le joueur n'ait plus de jeton après n activations de la machine; ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathrm{P}([\mathrm{Z}_n = 0])$.
On note également R l'événement : « le joueur finit par ne plus avoir de jeton » .

5. (a) Préciser les valeurs de u_0 et de u_1.
   (b) Comparer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les événements $[\mathrm{Z}_n = 0]$ et $[\mathrm{Z}_{n+1} = 0]$.
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente.

Dans la suite de l'exercice, on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. **On admet** que $\mathrm{P}(\mathrm{R}) = \ell$.

6. (a) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\mathrm{P}_{[\mathrm{Z}_1=k]}([\mathrm{Z}_2 = 0]) = (u_1)^k$.

   On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\mathrm{P}_{[\mathrm{Z}_1=k]}([\mathrm{Z}_{n+1} = 0]) = (u_n)^k$.

   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}([\mathrm{Z}_1 = k])\,(u_n)^k = \dfrac{p}{1-qu_n}$.

7. (a) Montrer que ℓ vérifie : $(\ell-1)\left(q\ell - p\right) = 0$.
   (b) On suppose $p \geqslant \dfrac{1}{2}$. Montrer : $\mathrm{P}(\mathrm{R}) = 1$.
   (c) On suppose $p < \dfrac{1}{2}$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0, \dfrac{p}{q}\right]$. En déduire : $\mathrm{P}(\mathrm{R}) < 1$.
   (d) Expliquer pourquoi le casino préférera choisir p dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

PARTIE C :

On suppose à présent que $p \geqslant \dfrac{1}{2}$.
Le casino cherche la valeur à donner à p pour que le joueur joue le plus longtemps possible dans le casino et ainsi, dépense plus d'argent dans ses consommations au bar.
On note T la variable aléatoire égale au nombre d'activations de la machine effectuées par le joueur lorsque, pour la première fois, celui-ci n'a plus de jeton.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = 1 - u_n$.

8. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathrm{P}([\mathrm{T} \leqslant n])$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}([\mathrm{T} = n]) = v_{n-1} - v_n$.

9. Montrer, pour tout N de $\mathbb{N}^*$: $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} n\mathrm{P}([\mathrm{T} = n]) = \sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}-1} v_n - \mathrm{N}v_{\mathrm{N}}$.

10. On suppose dans cette question que $p = \dfrac{1}{2}$.

    (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n}{n+1}$.
    (b) En déduire que la variable aléatoire T n'admet pas d'espérance.

11. On suppose maintenant que $p > \dfrac{1}{2}$.

    On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{1-u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$.

    (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{q}{p} w_n$.

    (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$, puis : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n \leqslant \left(\dfrac{q}{p}\right)^n$.

    (c) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance et que l'on a : $\mathrm{E}(\mathrm{T}) \leqslant \dfrac{1}{1-\frac{q}{p}}$.

12. Quelle(s) valeur(s) de p recommanderiez-vous au casino ?

Exercice 3

On cherche à étudier la suite de réels (u_n) telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n^5 + nu_n - 1 = 0$$

1. Soit $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^5 + nx - 1 \end{array}$. Dresser le tableau de variation de f_n sur son ensemble de définition.
2. En déduire l'existence et l'unicité de u_n. Montrer que (u_n) est à termes positifs. Montrer que la suite (u_n) est majorée, et en donner un majorant.
3. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(u_n) \geqslant 0$. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
4. Justifier l'existence de $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
5. Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1 - \ell^5$. En déduire que $\ell = 0$.
6. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

On définit la suite (v_n) telle que $u_n = \dfrac{1}{n} + v_n$.

7. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nv_n = 0$.
8. En utilisant l'équation vérifiée par u_n, montrer que $nv_n = -\dfrac{1}{n^5}\left(1 + nv_n\right)^5$. En déduire que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^6}$.