Devoir maison n°4

À rendre pour le 7/12

Exercice 1

On désigne par n un entier naturel non nul.
On lance n fois une pièce de monnaie donnant « Pile » avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et « Face » avec la probabilité $q = 1 - p$.
On appelle *k-chaîne de « Pile »* une suite de k lancers consécutifs ayant tous donnés « Pile » , cette suite devant être précédée d'un « Face » ou débuter le tirage, et suivie d'un « Face » ou terminer le tirage.
Pour tout k de $[\![1, n]\!]$ on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre total de k-chaînes de « Pile » obtenues au cours des n lancers.

Par exemple, avec $n = 11$, si l'on a obtenu les résultats P, P, F, F, P, P, P, F, P, F, P, alors

- $Y_1 = 2$ (deux 1-chaînes aux lancers 9 et 11)
- $Y_2 = 1$ (une 2-chaîne aux lancers 1 et 2)
- $Y_3 = 1$ (une 3-chaîne aux lancers 5,6,7)
- et pour tout $k \geqslant 4$, $Y_k = 0$.

Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout k de $[\![1, n]\!]$ l'espérance de Y_k, notée $E(Y_k)$.

Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on pourra noter P_k l'événement : « on obtient « Pile » au k-ème lancer » , et F_k l'événement : « on obtient « Face » au k-ème lancer » .

1. Déterminer la loi de Y_n et donner $E(Y_n)$.
2. Montrer que $P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$. et donner $E(Y_{n-1})$.
3. Dans cette question, k désigne un entier de $[\![1, n-2]\!]$.
   Pour tout i de $[\![1, n]\!]$ on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k-chaîne de « Pile » commence au i-ème lancer et qui vaut 0 sinon.
   (a) Calculer $P(X_{1,k} = 1)$.
   (b) Soit $i \in [\![2, n-k]\!]$. Montrer que $P(X_{i,k} = 1) = q^2 p^k$.
   (c) Montrer que $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$.
   (d) Exprimer Y_k en fonction des variables $X_{i,k}$, puis déterminer $E(Y_k)$.

Exercice 2 : Problème du collectionneur

Une marque de céréales propose de collectionner des vignettes : chaque paquet contient une vignette, et il y a en tout N vignettes différentes.
On suppose que les vignettes insérées dans les paquets successifs sont indépendantes les unes des autres, et que chaque vignette est choisie au hasard uniformément. Une personne achète un paquet de céréales par jour : on étudie l'évolution de sa collection au cours du temps.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose X_k la variable aléatoire comptant le nombre de vignettes distinctes obtenues au bout de k paquets achetés.
   Préciser $X_k(\Omega)$ (on distinguera $k \leqslant N$ et $k > N$). Donner les lois de X_1, X_2 et X_3.

Pour $k \in [\![1, N]\!]$, on note S_k le nombre de jours nécessaires que doit attendre le collectionneur pour que le nombre de vignettes différentes qu'il possède passe de $k-1$ à k.
On note $S = S_1 + \cdots + S_N$ le nombre de jours nécessaires pour obtenir la collection complète des N vignettes.

2. Que vaut $S_k(\Omega)$ pour $k \in [\![1, N]\!]$?

3. Justifier que S_k suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
4. Montrer que $E(S) = N \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.

Voir un TD précédent : on montre alors que $E(S) \underset{N\to+\infty}{\sim} N\ln(N)$.

On donne maintenant des majorations sur les déviations à cette espérance : le temps moyen étant celui calculé ci-dessus, quelle est la probabilité qu'on doive attendre plus longtemps ?

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, et $i \in [\![1, N]\!]$, on note $B_{i,m}$ l'événement : « au jour m, on n'a toujours pas obtenu la vignette i » .

5. Calculer $P(B_{i,m})$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, m]\!]$.
6. Exprimer l'événement $(S > m)$ en fonction des événements $B_{i,m}$ (avec explications !!).
7. On rappelle la *formule de Boole* : si $(A_1, ..., A_n)$ sont des événements, on a :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

   Montrer que $P(S > m) \leqslant N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^m$.
8. Montrer : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leqslant x$. En déduire :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, P(S > m) \leqslant Ne^{-m/N}$$

   Donner une majoration de la probabilité qu'il faille attendre c jours de plus que la moyenne pour obtenir la collection complète.