ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2023-2024
Mathématiques

Programme de colle n°9
Semaine du 4/12

Variables aléatoires discrètes

Pour cette semaine, tous les exercices étoilés de la feuille de TD 5.2 sur les variables discrètes sont exigibles.

Probabilités dénombrables : révisions de première année

- Probabilités : définitions, propriétés. Probabilités conditionnelles. Probabilités composées. SCE et probabilités totales (cas fini et cas infini dénombrable). Formule de Bayes.
- Variables aléatoires discrètes : loi, espérance, variance. Lois discrètes usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson. Interprétations ; il faut savoir reconnaître et utiliser ces lois dans des contextes « concrets » .
  Espérances et variances pour chacune de ces lois.

Variables aléatoires discrètes ; couples de VAD

- Définitions : loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles.
- Espérance, théorème de transfert. Pour l'existence on demande la convergence *absolue* des séries en jeu.
- Indépendance de deux VAD ; indépendance mutuelle, indépendance 2 à 2 de n VAD ; d'une suite de VAD.
  NB : par défaut, on appelle « indépendance » l'indépendance mutuelle.
- Lemme des coalitions (admis). Corollaire : si X, Y indépendantes, alors toutes VAD de la forme $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
- Espérance du produit de 2 variables aléatoires indépendantes. ; de n variables aléatoires mutuellement indépendantes.
- Théorème de transfert, linéarité de l'espérance, loi du min/loi du max de VAD indépendantes, stabilités des lois binomiale et de Poisson.

<u>Pour les colles de vendredi</u> on ajoute :

Variance, covariance, coefficient de corrélation

- Définition : moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$. Propriétés d'existence : si X admet un moment d'ordre 2 ($\Leftrightarrow$ admet une variance), elle admet un moment d'ordre 1 ; si X et Y admettent 1 variance, $X+Y$ également et XY admet une espérance (admis).
- Variance : définition, Koenig-Huygens. Règles de calcul : $V(aX+b) = a^2V(X)$. Variance de la somme de deux VAD indépendantes. $V(X) = 0$ ssi X presque sûrement constante.
- Covariance de deux variables admettant des variances :
  $$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
  Bilinéarité. $\mathrm{Cov}(X,X) = V(X)$. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{2}(V(X+Y) - V(X) - V(Y))$.
- Coefficient de corrélation : $\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$. $\rho(X,Y) \in [-1,1]$; interprétation de son signe ;
  $\rho(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow \ Y = aX+b$ presque sûrement, et alors $\rho(X,Y) = \mathrm{signe}(a)$.