CB1 - Maths 2bis - DM

Indications

Durée : 4h

Exercice 1

Exercice 2

PARTIE A :

1. $(Y = k) = (X = k - 1)$.
2.
3. Simuler une loi géométrique comme temps d'attente du premier succès.

PARTIE B :

4. Dans la boucle on forme une somme d'autant de tirages de X qu'il y a de jetons introduits (donc Z).
5. (a) u_0 : proba de n'avoir aucun jeton avant même d'avoir commencé à jouer.
   u_1 : proba qu'il ne ressorte pas de jeton dans la machine quand on en met un. Traduire en un événement simple sur X.
   (b) Si on n'a plus de jeton au bout de n tours de jeu, combien en a-t-on au « tour » suivant ?
6. (a) Sachant qu'on introduit k jetons, quelles valeurs doivent prendre $X_1, \ldots, X_k$ pur qu'aucun jeton ne sorte de la machine ? Ne pas oublier de justifier proprement les étapes du calcul.
   (b)
7. (a) Obtenir une équation sur ℓ par une méthode TRÈÈÈÈÈÈÈS usuelle.
   Montrer que $\ell - q\ell^2 = p$.
   Développer ensuite l'expression proposée pour montrer qu'elle est nulle.
   (b) Observer que $p \geqslant 1/2 \Leftrightarrow \dfrac{p}{q} \geqslant 1$ (car $q = 1 - p$).
   (c) Étudier $f : x \mapsto \dfrac{p}{1 - qx}$ et trouver un intervalle stable convenable.
   Puis par contraposée $p < 1/2 \Leftrightarrow \dfrac{p}{q} < 1$
   (d) Le casino aimerait bien ruiner le joueur...

PARTIE C :

8.
9. Injecter ce qui précède ; découper la somme ; changer d'indice dans un des deux morceaux ; recoller les morceaux à des termes de bord près. Mettre les mains dans le cambouis !
10. (a) Récurrence en utilisant la partie B.
    (b) On a manipulé en question 9 les sommes partielles de la série définissant l'espérance
11. (a) Bien calculatoire !
    (b) Renverser la définition de w_n pour exprimer u_n en fonction de w_n.
    Puis on peut avoir une expression explicite de v_n ; et avec $q/p < 1$ on a $(q/p)^n < q/p$.
    (c) Examiner la convergence de $\sum v_n$ et majorer sa somme ; déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} n v_n$.
12.

Exercice 3