Réduction des matrices carrées

Soit M une matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On étudie dans ce chapitre la possibilité de trouver une matrice diagonale semblable à M ; c'est-à-dire l'existence d'une matrice P inversible et d'une matrice D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$.

On sait que la relation de similitude est liée au changement de base : si $M = PDP^{-1}$, M et D sont deux matrices du même endomorphisme f dans deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

Traduisons alors notre problème : M étant donnée, il est possible de lui associer son endomorphisme canoniquement associé, noté f. On cherche alors une base $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ telle que

$$\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Si $\mathscr{B}$ est une telle base, la lecture de cette matrice montre que : $\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ f(u_i) = \lambda_i u_i$. Il convient alors de chercher des vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ et des réels λ tels que $f(x) = \lambda x$; ou, en repassant du côté matriciel, des *colonnes* $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et des réels λ tels que $MX = \lambda X$.

De tels objets sont appelés éléments propres de la matrice. Commençons donc par cela.

Dans tout ce chapitre, les matrices sont carrées.

1 Éléments propres d'une matrice

Définition 1 (Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice)**.**
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *On dit que* $\lambda \in \mathbb{R}$ *est une* valeur propre *de M ssi il existe* $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ***non nulle*** *tel que* $MX = \lambda X$.
2. *Si* λ *est une valeur propre de M, on appelle* vecteur propre *de M associé à la valeur propre* λ*, toute colonne* $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *telle que :*
   - $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
   - $MX = \lambda X$.

   On voit ainsi que λ *est une valeur propre de M ssi il existe un vecteur propre de M associé à* λ.
3. *On appelle* spectre de M *l'ensemble des valeurs propres de M. On note Sp(M) le spectre de M.*

Exemple 1. Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M, pour la valeur propre 2.

Remarque 1.

- Attention, pour montrer qu'une colonne est un vecteur propre, il ne faut pas oublier de signaler qu'elle est non nulle !!!
- On abrégera valeur propre en « vap » , et vecteur propre en « vep » .
- Il peut arriver qu'une matrice n'ait aucune valeur propre : par exemple, $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

  (nous justifierons cela plus bas).

1.1 Critère d'existence de vap/vep

On notera $\mathbf{0}$ la colonne nulle $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On voit que $MX = \lambda X$ peut se réécrire $\left(M - \lambda I_n\right)X = \mathbf{0}$.
λ est donc une valeur propre de M ssi il existe une colonne X non nulle telle que $\left(M - \lambda I_n\right)X = \mathbf{0}$; autrement dit

Proposition 1. λ *est une valeur propre de* M *ssi* $\operatorname{Ker}\left(M - \lambda I_n\right) \neq \left\{\mathbf{0}\right\}$.

Si f est l'endomorphisme canoniquement associé à M, $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ est canoniquement associé à $M - \lambda I_n$. On sait alors que $\operatorname{Ker}\left(M - \lambda I_n\right)$ est l'ensemble des coordonnées des vecteurs de $\operatorname{Ker}\left(f - \lambda \mathrm{Id}\right)$; on a alors la chaîne d'équivalences :

Proposition 2.

$$\begin{aligned} \lambda \textit{ est une valeur propre de } M &\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(M - \lambda I_n) \neq \{\mathbf{0}\} \\ &\Leftrightarrow f - \lambda \mathrm{Id} \textit{ n'est pas un automorphisme} \\ &\Leftrightarrow M - \lambda I_n \textit{ n'est pas inversible} \end{aligned}$$

Ce dernier résultat constitue la caractérisation la plus utile des valeurs propres :

Théorème 3. *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Un réel* λ *est valeur propre de M si et seulement si* $M - \lambda I_n$ *n'est pas inversible.*

Exemple 2. Montrer que $\lambda = 1$ est une vap de $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

NB : le cas particulier $\lambda = 0$ est intéressant à noter :

Proposition 4. $0 \in \operatorname{Sp}(M)$ *ssi M n'est pas inversible.*

1.2 Sous-espaces propres

Définition 2. *Si* $\lambda \in \operatorname{Sp}(M)$, *on appelle sous-espace propre de* M *associé à la valeur propre* λ *le sous-espace vectoriel :*

$$E_\lambda(M) = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = \lambda X\right\}$$

$E_\lambda(M)$ *est donc un sev de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarque 2. $E_\lambda(M)$ est donc l'ensemble des vecteurs propres de M associés à λ... auxquels il faut ajouter la colonne nulle.

Exemple 3. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que 1 est valeur propre de M, et déterminer $E_1(M)$.

Le cas particulier $\lambda = 0$ est ici aussi à noter :

Remarque 3. On a vu que $0 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$ ssi M n'est pas inversible ; dans ce cas le sous-espace propre associé est $\mathrm{E}_0(\mathrm{M}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{M})$.

Le théorème suivant montre que des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes forment une famille libre.

Théorème 5. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ soient r valeurs propres deux à deux distinctes de* M. *Soient $\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_r$ des vecteurs propres associés respectivement à $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Alors la famille $(\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_r)$ est libre.*

Démonstration. Admis. □

Ce résultat a des conséquences notables :

Corollaire 6.

- *Une matrice carrée $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au plus n valeurs propres distinctes.*
- *Toute famille construite en concaténant des bases de sous-espaces propres (pour des vap 2 à 2 distinctes) est libre.*
- *La somme des dimensions des sous-espaces propres de* M *est inférieure ou égale à n.*

Démonstration.

- S'il existe $n+1$ vap 2 à 2 distinctes, le théorème 5 donne une famille libre de $(n+1)$ colonnes dans l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension n, ce qui est absurde.
- Conséquence du théorème 5.
- Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ les vap 2 à 2 distinctes de M. Si on note n_i la dimension du sep associé à la vap λ_i, on a, d'après le point précédent, une famille libre de $\sum_{i=1}^{k} n_i$ vecteurs ; ce qui montre que $\sum_{i=1}^{k} n_i \leqslant n$.

□

2 Recherche de valeurs propres

Pour diagonaliser une matrice, il faut trouver toutes ses valeurs propres ; et déterminer, pour chaque valeur propre, le sous-espace propre associé.
La première méthode que nous exposons consiste à utiliser le théorème 3 : il faut alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque, discuter l'inversibilité de la matrice $M - \lambda I_n$.

2.1 Rappel : discussion de l'inversibilité d'une matrice

On dispose de deux moyens pour discuter l'inversibilité d'une matrice. La difficulté dans ce chapitre est que la matrice sur laquelle porte la discussion aura un paramètre non fixé (il s'agit de $M - \lambda I_n$). La méthode de résolution d'un système linéaire ne se prête pas très bien à la chose et fait effectuer des calculs inutiles.

2.1.1 Cas $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$: le déterminant

On sait que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ n'est pas inversible ssi $ad - bc = 0$.

2.1.2 Cas $n \geqslant 3$: pivot de Gauss

Si M est une matrice dont on note les lignes $L_1, \dots, L_n$, on définit les deux *opérations élémentaires* suivantes :

- échange de deux lignes ($L_i \leftrightarrow L_j$).
- combinaison linéaire de lignes : $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ (avec β réel quelconque, et α réel NON NUL).

Le rang d'une matrice étant le rang de la famille de ses lignes, on se convainc facilement que ces opérations transforment une matrice en une autre matrice de même rang ; notamment M est inversible ssi toute matrice obtenue à partir de M par pivot l'est. Il suffit alors d'effectuer des opérations pour « transformer » M en une matrice triangulaire, dont il est facile de discuter l'inversibilité.
Dans cette procédure, on appelle « pivot » un coefficient non nul dont on se sert pour annuler tous les coefficients qui sont en-dessous. La non-nullité de ce pivot est essentielle.

2.2 Recherche directe de valeurs propres

Le cas des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, le déterminant de $M - \lambda I_2$ est un trinôme de degré 2 en la variable λ. On résout donc facilement l'équation $\det(M - \lambda I_2) = 0$; les solutions sont les valeurs propres de M.

Exemple 4. Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Exemple 5. Montrer que $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de valeur propre.

Pour des matrices de taille supérieure, on effectue un pivot de Gauss sur $M - \lambda I_n$, jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure. Cette matrice n'est pas inversible ssi elle possède des coefficients diagonaux nuls ; ceci donne des équations en λ qui permettent la détermination des valeurs propres.

La difficulté est qu'on doit travailler sur des pivots non nuls ; or ici beaucoup de coefficients dépendent de λ, dont certains qu'on souhaiterait utiliser comme pivot. Mais on doit alors discuter : par exemple si on veut annuler des coefficients à l'aide de l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow (\lambda - 1)L_2 + 2L_3$, on doit traiter à part le cas $\lambda = 1$ où cette opération n'est pas légitime. Pour éviter trop de discussions inutiles :

Méthode :
Dans un pivot de Gauss avec un paramètre λ, on n'utilisera que des pivots indépendants de λ.

Ceci est toujours possible, moyennant des manipulations habiles sur la matrice.

Exemple 6. Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en effectuant un pivot de Gauss sur $A - \lambda I_3$.

2.3 Vérifier qu'un réel donné est une valeur propre

L'énoncé peut décider de vous épargner les opérations décrites dans la section précédente, en vous donnant les valeurs propres. Le critère est similaire :

$$\text{Un réel } \lambda \text{ est valeur propre de M ssi } \mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n \text{ n'est pas inversible.}$$

Il est donc <u>extrêmement maladroit</u> de dérouler la méthode de la section précédente pour trouver toutes les valeurs propres, et de constater que la valeur donnée est bien parmi les solutions : une discussion d'inversibilité usuelle suffit.

Exemple 7. Montrer que -1 est valeur propre de $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

et si on ne « voit pas » l'inversibilité comme dans l'exemple précédent, on peut utiliser la caractérisation sur le noyau :

$$\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas inversible ssi il existe des colonnes } \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ non nulles telles que } \mathrm{MX} = \mathbf{0}.$$

Exemple 8. Montrer que 1 est valeur propre de $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

2.4 Polynômes annulateurs, et leur utilisation

On commence par définir la notion de polynôme de matrice :

Définition 3. *Soit* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, *et* $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_p\mathrm{X}^p \in \mathbb{R}[x]$. *On définit la matrice* $\mathrm{P(M)}$ *par :*

$$\mathrm{P(M)} = a_0\,\mathrm{I}_n + a_1\mathrm{M} + \cdots + a_p\mathrm{M}^p$$

Remarque 4. Attention au terme constant, qui est $a_0\mathrm{I}_n$ et non a_0 !!

Proposition 7 (Règles de calcul)**.** *On peut vérifier les propriétés suivantes :*

- $\forall\, \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall\, (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q})(\mathrm{M}) = \lambda\mathrm{P(M)} + \mathrm{Q(M)}.$
  (autrement dit, $\mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P(M)}$ *est linéaire)*
- $\forall\, \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall\, (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2,\ (\mathrm{PQ})(\mathrm{M}) = \mathrm{P(M)} \times \mathrm{Q(M)}.$

On introduit ensuite la notion de polynôme annulateur :

Définition 4. *Soit* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, *et* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. *On dit que P est un polynôme annulateur de* M*, ou que P annule* M*, ssi* $\mathrm{P(M)} = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

Le résultat essentiel est alors le suivant :

Théorème 8. *Si P est un polynôme annulateur de M, alors toute valeur propre de* M *est une racine de P.*

Démonstration. Soit λ une vap de M, et X un vep associé. De $\mathrm{MX} = \lambda\mathrm{X}$, on tire par une récurrence immédiate : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{M}^n\mathrm{X} = \lambda^n\mathrm{X}$, puis : $\mathrm{P(M)X} = \mathrm{P}(\lambda)\mathrm{X}$. P(M) étant la matrice nulle, on a alors $\mathrm{P}(\lambda)\mathrm{X} = \mathbf{0}$. Or le vep X est non nul par définition, donc $\mathrm{P}(\lambda) = 0$: λ est bien une racine de P.

□

Remarque 5. Attention, la réciproque est fausse : une racine d'un polynôme annulateur de M n'est par forcément valeur propre de M.
Par exemple, le polynôme $X^2 - X$ annule I_n, et pourtant 0 n'est pas valeur propre de I_n.

Le spectre de M est donc contenu dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur de M. Si on dispose d'un tel polynôme (ce qui est relativement courant dans une épreuve de concours – savoir repérer quand c'est le cas !), une méthode de recherche des valeurs propres consiste donc à chercher les racines de ce polynôme : ces racines sont les seules « **candidates** » de vap.
On doit ensuite déterminer si chaque racine λ est **effectivement** une valeur propre, donc chercher s'il existe des solutions non nulles à l'équation $MX = \lambda X$).

Exemple 9. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Montrer que $M^2 = 4M - 3I_2$. En déduire le spectre de M.

Remarque 6 (Application : spectre d'une matrice nilpotente)**.** On dit qu'une matrice M est *nilpotente* s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$.
Soit M une telle matrice ; on voit alors que le polynôme X^p est annulateur de M. La seule racine de X^p est 0 ; donc 0 est la seule valeur propre *possible* de M.
Par ailleurs, on sait que 0 est valeur propre de M ssi M n'est pas inversible. Or si M était inversible, M^p le serait, ce qui est exclu car cette matrice est nulle. Donc M n'est pas inversible, donc 0 est valeur propre de M ; et finalement $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$.

On a montré que si M est nilpotente, alors $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$. Ce résultat sera à redémontrer sur une copie de concours.

3 Recherche des sous-espaces propres et diagonalisation

3.1 Méthode générale

Pour déterminer les sous-espaces propres, on applique la définition :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M}),\ \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M}) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n)$$

Remarque 7. Par définition d'une valeur propre, ce noyau ne sera pas réduit à la colonne nulle : si c'est le cas c'est que vous vous êtes trompés dans les calculs !!

Par une résolution élémentaire de système linéaire, on parvient à déterminer une base de $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M})$. On sait qu'en concaténant les bases des divers sous-espaces propres de M, on obtient une famille libre de colonnes. Si $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})} \dim(\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M})) = n$, on obtient finalement une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On a établi :

Proposition 9. *Si* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est telle que* $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})} \dim(\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M})) = n$*, alors M est diagonalisable.*

Si P est la matrice dont les colonnes sont les éléments de cette base, P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à une base de vecteurs propres de f canoniquement associé à M ; ainsi $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ sera diagonale.

Si $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})} \dim(\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M})) < n$, par contre, la matrice n'est en fait pas diagonalisable… cf. plus bas.

Finalement, pour diagonaliser une matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

- On recherche ses valeurs propres par les diverses méthodes exposées ;
- On cherche, pour chaque valeur propre, une base du sous-espace propre associé ;
- Si la matrice est diagonalisable, la réunion de toutes ces bases donne une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on range les colonnes de cette base dans une matrice P ;
- On a alors P inversible, et $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$ où D est diagonale.

Précisons alors la forme de D. On a vu que ses coefficients diagonaux étaient les valeurs propres de M. Plus précisément : si la i-ème colonne de P est un vecteur propre pour la valeur propre λ, alors le i-ème coefficient diagonal de D est égal à λ.

3.2 M est-elle diagonalisable ? (devenu HP)

On est en droit de se demander si en déroulant la méthode précédente on va bel et bien pouvoir diagonaliser M. On vient de voir qu'un cas où la réponse est positive est celui où la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n ; c'est en fait une condition nécessaire et suffisante.

Proposition 10. *Si* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est telle que* $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})} \dim(\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M})) < n$*, alors M n'est pas diagonalisable.*

Démonstration. Supposons en effet qu'elle le soit. Il existe une base de vecteurs propres $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n)$. Classons ces vecteurs propres par valeur propre :

- $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{p_1}$ sont vep pour la vap λ_1
- $\mathrm{X}_{p_1+1}, \ldots, \mathrm{X}_{p_2}$ sont vep pour la vap λ_2
- …
- $\mathrm{X}_{p_{r-1}+1}, \ldots, \mathrm{X}_n$ sont vep pour la vap λ_r

On remarque alors que $(X_1, \ldots, X_{p_1})$ est une famille libre de vecteurs de $E_{\lambda_1}(M)$: donc $\dim(E_{\lambda_1}(M)) \geqslant p_1$; et de même sur chaque bloc $\dim(E_{\lambda_i}(M)) \geqslant p_i - p_{i-1}$.
En sommant toutes ces inégalités on obtient $\dim(E_{\lambda_1}(M)) + \ldots + \dim(E_{\lambda_r}(M)) \geqslant n$ (le terme de droite est le nombre de vecteurs dans la base !).
Puis finalement

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim(E_\lambda(M)) \geqslant \dim(E_{\lambda_1}) + \ldots + \dim(E_{\lambda_r}) \geqslant n$$

ce qui contredit l'hypothèse. □

Les propositions 9 et 10 montrent en fait le théorème (devenu HP) :

Théorème 11 (Hors programme : condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité)**.**
$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est diagonalisable si et seulement si* $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim(E_\lambda(M)) = n$.

Si jamais on vous demande de justifier qu'une matrice n'est pas diagonalisable, c'est ce résultat qu'il faudra utiliser... en le démontrant !!

Mentionnons un autre critère utile.
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres distinctes :

- les n sous-espaces propres associés sont tous de dimension $\geqslant 1$ et donc $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim(E_\lambda) \geqslant n$;
- mais on sait d'après le corollaire 6 que $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim(E_\lambda) \leqslant n$;
- on en déduit donc $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim(E_\lambda) = n$.

Le résultat suivant n'est plus au programme mais peut être retenu :

Théorème 12 (Hors-programme : condition suffisante de diagonalisabilité)**.**
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *a n valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable ; et de plus chaque sous-espace propre est de dimension 1.*

Remarque 8. Si les énoncés de concours sont conformes à « l'esprit du programme » tout ceci ne devrait en fait pas vous être utile : on vous demandera de diagonaliser des matrices diagonalisables ; et si une matrice n'est pas diagonalisable on vous indiquera une marche à suivre.

3.3 Un exemple de diagonalisation (méthode brutale)

Exemple 10. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de M en effectuant un pivot de Gauss sur $M - \lambda I_3$.
2. Déterminer les sous-espaces propres de M. Diagonaliser M.

3.4 Le même exemple, avec moins de calcul et des observations judicieuses

Exemple 11. On reprend $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2. En déduire que 0 et 3 sont les seules valeurs propres **possibles** de M.
2. Déterminer $\mathrm{rg}(M)$. En déduire, *sans calcul supplémentaire*, $\dim(E_0(M))$.

3. Calculer $M \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. En déduire *sans calcul supplémentaire* le spectre de M, une base de $E_3(M)$, et diagonaliser M.

3.5 Quelques cas particuliers

3.5.1 Matrice diagonale

Une matrice diagonale est diagonalisable (!). En effet, en prenant $P = I_n$ on a bien $D = PDP^{-1}$ avec D diagonale.

3.5.2 Matrice triangulaire

La recherche des vap d'une matrice triangulaire est particulièrement simple :

Proposition 13. *Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.*

Démonstration. $M - \lambda I_n$ est une matrice triangulaire, donc est non inversible ssi au moins un de ses coefficients diagonaux est nul, donc ssi il existe i tel que $\lambda = m_{i,i}$. Les valeurs propres de M sont donc ses coefficients diagonaux. □

Remarque 9. Attention : cela ne dit pas que la dimension de E_λ correspond au nombre d'apparitions de λ sur la diagonale. Considérons par exemple $M = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$: 1 est valeur propre d'après ce qui précède. On montre facilement que $E_1(M) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$, qui est de dimension 1.

3.5.3 Matrice symétrique

Dans le cas particulier où M est symétrique, il existe un théorème assez puissant (admis) :

Théorème 14. *Toute matrice symétrique est diagonalisable.*

Remarque 10. On ne tirera rien d'autre de ce théorème : les valeurs propres et vecteurs propres seront à trouver avec les méthodes usuelles.

4 Et si M n'est pas diagonalisable ??

On vous dira quoi faire. Un cas fréquent est de construire une matrice P inversible telle que PDP^{-1} soit triangulaire (supérieure le plus souvent). On dit qu'on a *trigonalisé* M (vocabulaire hors-programme). Ceci peut servir, dans des cas favorables, à calculer des puissances successives de M.