ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2023-2024
Mathématiques

Programme de colle n°10
Semaine du 11/12

Variables aléatoires discrètes
Début de la réduction

Pour cette semaine, tous les exercices étoilés de la feuille de TD 5.2 sur les variables discrètes sont exigibles.

En réduction on se limitera, lundi et mardi, à la recherche de valeurs propres et de vecteurs propres.

Probabilités discrètes : reprise des programmes précédents

Réduction des matrices carrées

Attention, depuis le nouveau programme, on ne réduit plus que des matrices, et le chapitre est à visée beaucoup plus « pratique » qu'avant.

Dans ce qui suit, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Définitions : valeur propre, vecteur propre.
  Sous-espace propre : $E_\lambda(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = \lambda X\}$.
- $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ ssi $M - \lambda I_n$ est non inversible (cas particulier très fréquent avec $\lambda = 0$).
- Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.
  Extension : une concaténation de bases de sep associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.
  Conséquence : $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim(E_\lambda) \leqslant n$.
- Une matrice est diagonalisable ssi il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $M = PDP^{-1}$.
- Polynômes de matrice ; polynôme annulateur. Si P est annulateur de M, Sp (M) est contenu dans l'ensemble des racines de P.
- Le spectre d'une matrice triangulaire est l'ensemble de ses coefficients diagonaux (utilisable sans démonstration)
- Si M est symétrique, alors elle est diagonalisable (aucun autre résultat d'algèbre bilinéaire évidemment).

Réduction en pratique

- Recherche des éléments propres :
  - On discute l'inversibilité d'une matrice par le déterminant en dimension 2, ou un pivot de Gauss avec le paramètre λ en dimension $\geqslant 3$.
  - Utilisation d'un polynôme annulateur.
  - L'étude du rang de $M - \lambda I_n$ et l'application du théorème du rang peut fournir une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.
    NB : la version matricielle du théorème du rang est hors-programme. Il faut introduire l'endomorphisme canoniquement associé.
- Recherche des sous-espaces propres :

  - Résolution de systèmes linéaires ;
  - dans certains cas, des arguments de dimension permettent de s'en sortir (ex : on connaît un vecteur propre associé à λ et on démontre que E_λ est de dimension 1).
- Construction de P et D telles que $M = PDP^{-1}$.