Réduction
Exercices

Exercice 1.

1. Diagonaliser les matrices suivantes, en recherchant le spectre par pivot de Gauss.
   On prendra soin de suivre les contraintes suivantes : on écrira $M_i = P_i D_i P_i^{-1}$ avec :
   - Les coefficients diagonaux de D_1 rangés par ordre croissant ;
   - P_3 inversible de seconde ligne $\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$, et D_3 diagonale dont les coefficients sont rangés par ordre croissant.
   - P_5 triangulaire supérieure, de première ligne $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.
2. Donner l'expression de $(M_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$M_1 = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix}6 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad M_5 = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad M_6 = \begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ -2 & 5 & 2\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

Exercice 2 (Un pivot délicat)**.** Déterminer le spectre de $M = \begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soient $A = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -3 & 3 & -3\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 7A$. Diagonaliser A.
2. Déterminer le rang de B, et celui de $B - 2I_3$. En déduire deux valeurs propres de B et les dimensions de leurs sous-espaces propres associés.
3. Calculer $B \times \begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$. Déterminer tous les sous-espaces propres de B, et la diagonaliser.
4. Déterminer une matrice P vérifiant les conditions suivantes ;
   - $D_1 = P^{-1}AP$ est diagonale ;
   - $P^{-1}BP = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$;
   - La première ligne de P vaut $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

5. Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables ; donner à chaque fois une matrice P et une matrice D telles que $M = PDP^{-1}$.

   - $M = A + 2I_3$.
   - $M = B^2$
   - $M = 3A - 7B$.

Exercice 4.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Sans AUCUN calcul, montrer que A est diagonalisable.
2. **Sans effectuer un pivot**, montrer que -1 est une valeur propre de A, et donner la dimension de $E_{-1}(A)$. (NB : on ne demande pas de déterminer $E_{-1}(A)$, seulement de trouver sa dimension).
3. Calculer $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Retrouver le fait que A est diagonalisable, et montrer qu'elle est inversible.
4. Déterminer des matrices $P \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et Δ diagonale telles que $A = P\Delta P^{-1}$.

Exercice 5 (Mises à la puissance n et application)**.**

1. On reprend les matrices de l'exercice 3. Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la matrice $(A - B)^n$.
2. On considère les trois suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ définies par : $a_0 = 1, b_0 = 1, c_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n - c_n) \\ b_{n+1} = a_n + c_n \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2a_n - 2b_n + 4c_n) \end{cases}$$

   (a) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

   (b) En déduire les expressions explicites de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

   (c) On considère les mêmes suites, mais vérifiant cette fois les conditions initiales $a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$ où a, b, c sont des réels.
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que ces trois suites tendent vers 0 pour $n \to +\infty$.

Exercice 6 (Mises à la puissance n et application)**.**

On considère une suite réelle (u_n) telle que $u_0 = 1, u_1 = u_2 = 0$, et obéissant à la relation de récurrence :

$$u_{n+3} = 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n$$

On introduit la colonne $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$

1. Donner une matrice M telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = MV_n$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $M \times \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que si λ est racine du polynôme $X^3 - 4X^2 + X + 6$, alors λ est valeur propre de M.

3. En remarquant que -1 est racine de ce polynôme, trouver toutes les valeurs propres de M. En déduire que M est diagonalisable, et donner P et D telles que $M = PDP^{-1}$ (on prendra la première ligne de P composée uniquement de « 1 » , et les coefficients diagonaux de D classés par ordre croissant).

4. Montrer que la suite U_n définie par : $U_n = P^{-1}V_n$ vérifie $U_n = D^n U_0$.

5. On donne $P^{-1} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 12 & 8 & -4 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.
   En déduire U_0, puis U_n pour tout entier n, puis u_n pour tout entier n.

Exercice 7 (Une matrice non diagonalisable)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Calcul de puissances de A par trigonalisation

1. Calculer $A^2 - 4A$. En déduire le spectre de A.

2. Montrer par l'absurde que A n'est pas diagonalisable.

3. Déterminer l'unique sous-espace propre de A.

4. Soit f canoniquement associé à A. Calculer $f((1,1,1))$. Donner la matrice de f dans la base $\big((1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\big)$. On note T cette matrice.

5. Montrer que $A = PTP^{-1}$, où P est une matrice à préciser. Calculer P^{-1}.
   (NB : on dit qu'on a trigonalisé M).

6. Soit N telle que $T = 2I_3 + N$. Calculer N^2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer T^n en fonction de n.

7. En déduire A^n en fonction de n.

Une autre méthode de calcul de A^n par un polynôme annulateur

8. En reprenant le résultat de la question 1, montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = a_n I + b_n A$.
   Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

9. Déterminer une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 sur (b_n) ; en déduire l'expression de b_n pour tout entier n, puis celle de a_n.

10. En déduire l'expression de A^n en fonction de n, I_3 et A.

Exercice 8 (Oral HEC E)**.**

1. Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, alors A^3 l'est aussi.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^3. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 9. On définit :

Définition 1. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, on appelle* hyperplan de E *tout sous-espace vectoriel de E de dimension* $\dim(E) - 1$.

On va ici démontrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient des matrices inversibles. Supposons, par l'absurde, l'existence d'un hyperplan $H \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices non inversibles.

1. Exprimer $p = \dim(H)$ en fonction de n.
2. Soit $(A_1, \dots, A_p)$ une base de H. Montrer que $(A_1, \dots, A_p, I_n)$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit N une matrice nilpotente (*ie* il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que N^k est la matrice nulle).
   Montrer qu'il existe $A \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $N = A + \lambda I_n$.
4. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(N)$; en déduire que $\lambda = 0$ et que $N \in H$.

On a alors montré que toute matrice nilpotente est dans H. Nous allons maintenant construire une matrice inversible dans H, ce qui fera apparaître une contradiction.

5. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes, et que leur somme est inversible. Conclure à la contradiction recherchée.
6. Essayer de généraliser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour n entier quelconque.

Solutions

1

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, D_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, D_5 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2 Comme d'habitude : $\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. On effectue un pivot de Gauss :

$$L_1 \leftrightarrow L_3 \ : \ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1 \ : \ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & 8-3\lambda & 2\lambda \\ 3-\lambda & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow 3L_3 - (3-\lambda)L_1 \ : \ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & 8-3\lambda & 2\lambda \\ 0 & 2\lambda & -\lambda^2+6\lambda \end{pmatrix}$$

Ici les deux "pivots" candidats pour arriver à la forme triangulaire sont $8-3\lambda$ et 2λ... qui dépendent tous deux de λ et rendent les discussions pénibles. On a alors l'idée de combiner L_2 et L_3 pour faire apparaître une quantité indépendante de λ :

$$L_2 \leftarrow 2L_2 + 3L_3 \ : \ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & 16 & 22\lambda - 3\lambda^2 \\ 0 & 2\lambda & -\lambda^2+6\lambda \end{pmatrix}$$

et on peut maintenant utiliser le "16" :

$$L_3 \leftarrow 8L_3 - \lambda L_2 \ : \ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & 16 & 22\lambda - 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 3\lambda^3 - 30\lambda^2 + 48\lambda \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est triangulaire (ouf!) et donc non inversible ssi $3\lambda^3 - 30\lambda^2 + 48\lambda = 0$ (les autres coeff diagonaux étant clairement non nuls).
On écrit : $3\lambda^3 - 30\lambda^2 + 48\lambda = 3\lambda(\lambda^2 - 10\lambda + 16)$ et après un calcul de discriminant :

$$3\lambda^3 - 30\lambda^2 + 48\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, 2, 8\}$$

et donc $\mathrm{Sp}(M) = \{0, 2, 8\}$.

3

4 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Symétrique

2. $A + \lambda I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 1 ; donc non inversible.Par théorème du rang sur $f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$, où f est canoniquement associé à A, on trouve $\dim(E_{-1}(A)) = 3$.

3. $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non nulle, c'est un vecteur propre et 3 est valeur propre.
   E_3 est de dimension au moins 1, et au plus 1 car la somme des dim des SEP ne peut dépasser 4.
   $\dim(E_{-1}) + \dim(E_3) = 4$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 3\}$. $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$ donc A est inversible.

4. Sans calcul $E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ (espace de dimension 1 donc on connaît un vecteur non nul).
   Par résolution de système :
   $$E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$
   d'où
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6

1. $V_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. On trouve $M \times \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ -6 - \lambda + 4\lambda^2 \end{pmatrix}$.
   Si λ est racine du polynôme $X^3 - 4X^2 + X + 6$, alors $\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$ ou encore $\lambda^3 = 4\lambda^2 - \lambda - 6$.Et donc
   $$M \times \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$$
   $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$ est non nulle (1er coeff =1) donc est un vep, pour la vap λ.

3. En factorisant par $X + 1$: $X^3 - 4X^2 + X + 6 = (X + 1)(X^2 - 5X + 6)$ et on trouve 3 racines : 1,2,3.
   Ces 3 racines sont vap de M ; $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc il n'y en a pas d'autres.
   De plus tous les sep sont de dimension 1 et un générateur est donné par la question 2 ; avec les contraintes données par l'énoncé l'unique couple (P, D) qui convient est :
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. $U_{n+1} = P^{-1}V_{n+1} = P^{-1}MV_n = P^{-1}(PDP^{-1})V_n = (P^{-1}P)D(P^{-1}V_n) = DU_n$. Par une récurrence immédiate il s'ensuit $U_n = D^n U_O$.

5. $U_0 = P^{-1}V_0 = P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est la première colonne de P.

   Avec $D^n = \begin{pmatrix}(-1)^n & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}$ on en déduit U_n ; puis $V_n = PU_n$; et u_n est la première composante de V_n.

8 1. A est diagonalisable ssi elle peut s'écrire $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale et P inversible. Si c'est le cas on voit qu'alors $A^3 = (PDP^{-1})^3 = PD^3P^{-1}$; et comme D^3 est diagonale on en conclut que A^3 est diagonalisable.

2. On trouve $A^3 = I_3$.
   $X^3 - 1$ est donc un polynôme annulateur de A. Sa seule racine est 1 ; c'est la seule valeur propre possible de A. Donc :

   - Si A n'admet pas de valeur propre, elle n'est clairement pas diagonalisable ;
   - Si $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$, on raisonne par l'absurde : si A était diagonalisable on aurait $A = PDP^{-1}$ avec $D = I_3$ (diagonale constituée des vap de A... donc de 1). Alors $A = PI_3P^{-1} = I_3$, ce qui n'est pas le cas. Ici encore A n'est pas diagonalisable.

   NB : on pourrait aussi montrer que 1 est effectivement valeur propre de A, et $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ *est de dimension 1. La somme des dim des sep est 1, et donc* < 3 *: A n'est pas diagonalisable.*

9 *Indications :*

1. $p = \dim(H) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - 1 = n^2 - 1$

2. Famille de cardinal $n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
   On considère une combi lin $\lambda_0 I_n + \lambda_1 A_1 + ... + \lambda_p A_p$. Si λ_0 non nul on peut exprimer I_n en fonction des A_i et donc $I_n \in H$ qui ne contient que des non-inversibles : contradiction. Donc λ_0 est nul et les autres s'ensuivent : la famille est libre et c'est bien une base.

3. Il suffit de décomposer N sur la base précédente.

4. $A = N - \lambda I_n \in H$ donc est non inversible donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(N)$. Cf cours (il faut savoir refaire la démo) : le spectre d'une nilpotente est $\{0\}$. Donc $\lambda = 0$ et $N = A \in H$.

5. Ces deux matrices mises au cube donnent 0. La somme est $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$: elle est inversible par la méthode de votre choix (calcul du Ker ; calcul du rang...).
   Notre hyperplan H contient les deux nilpotentes, donc contient leur somme (c'est un sev) et cette somme est inversible : contradiction.

6. Prendre « les mêmes » matrices, en taille n. Pour l'inversibilité de la somme s'inspirer d'un exo précédent (cas $n = 4$) ; et pour la nilpotence on conçoit que ça marche mais ce n'est pas si facile à montrer...