Programme de colle n°11

Semaine du 18/12

Réduction des matrices

Pour cette semaine, on donnera une matrice diagonalisable de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n = 2$ ou 3 ; et on demandera à l'étudiant de la diagonaliser. La recherche du spectre se fera soit par pivot de Gauss, soit *via* des indications diverses (polynôme annulateur, donnée d'éléments propres,...)

Attention, le programme a changé ! On ne réduit plus que des matrices, et le chapitre est à visée beaucoup plus « pratique » que celui du programme d'ECE2. Pas de discussions « théoriques » de diagonalisabilité.

Dans ce qui suit, $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Définitions : valeur propre, vecteur propre.
  Sous-espace propre : $E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = \lambda X\}$.
  (NB : la notation est acceptée pour $\lambda \notin \mathrm{Sp}(M)$, et on a alors la caractérisation : $\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \Leftrightarrow E_\lambda(M) \neq \{0\}$.
- $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ ssi $M - \lambda I_n$ est non inversible (cas particulier très fréquent avec $\lambda = 0$).
- Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.
  Extension : une concaténation de bases de sep associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.
  Conséquence : $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim(E_\lambda) \leqslant n$.
- Une matrice est diagonalisable ssi il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $M = PDP^{-1}$.
- Polynômes de matrice ; polynôme annulateur. Si P est annulateur de M, Sp(M) est contenu dans l'ensemble des racines de P.
- Le spectre d'une matrice triangulaire est l'ensemble de ses coefficients diagonaux (utilisable sans démonstration)
- Si M est symétrique, alors elle est diagonalisable (aucun autre résultat d'algèbre bilinéaire évidemment).

Réduction en pratique

- Recherche des éléments propres :
  - On discute l'inversibilité d'une matrice par le déterminant en dimension 2, ou un pivot de Gauss avec le paramètre λ en dimension $\geqslant 3$.
  - Utilisation d'un polynôme annulateur.
  - L'étude du rang de $M - \lambda I_n$ et l'application du théorème du rang peut fournir une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.
    NB : la version matricielle du théorème du rang est hors-programme. Il faut introduire l'endomorphisme canoniquement associé.
- Recherche des sous-espaces propres :
  - résolution de systèmes linéaires ;
  - dans certains cas, des arguments de dimension permettent de s'en sortir (ex : on connaît un vecteur propre associé à λ et on démontre que E_λ est de dimension 1).
- Si $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim(E_\lambda) = n$, construction de P et D telles que $M = PDP^{-1}$.

- Si $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})} \dim(\mathrm{E}_\lambda) < n$, il n'est pas au programme de conclure que M n'est pas diagonalisable.
  Par contre on peut exiger le raisonnement par l'absurde qui montre que si $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) = \{\lambda\}$ et $\mathrm{M} \neq \lambda \mathrm{I}_n$, alors M n'est pas diagonalisable.

Applications

- Calcul de A^n dans le cas diagonalisable.
- Si A n'est pas diagonalisable, on peut la trigonaliser (doit être guidé par l'énoncé) ; dans certains cas le calcul de A^n peut s'effectuer par formule du binôme.
- Étude de suites récurrentes.
- Résolution d'une équation matricielle en se ramenant à une forme diagonalisée.