Sujets d'étude pendant les vacances (ne sera pas ramassé)

On répertorie ici un certain nombre d'applications classiques de la réduction à des équations matricielles.

Exercice 1 (EDHEC 2014)

On note I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. (a) *Calculatoire ; repenser au moyen de gérer le « pivot délicat » de la feuille de TD*
   Montrer, grâce à la méthode du pivot de Gauss, que les valeurs propres λ de A sont les solutions de l'équation : $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$.
   (b) Étudier la fonction f qui, à tout réel x associe $f(x) = x^3 - 9x^2 - 27x + 53$, puis dresser son tableau de variation (on précisera les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, on notera m le minimum local de f sur $\mathbb{R}$, M le maximum local de f sur $\mathbb{R}$ et on ne cherchera à calculer ni m, ni M).
   (c) Calculer $f(0)$ et $f(3)$ puis déterminer les signes de m et M.
   (d) Montrer que A admet trois valeurs propres, que l'on ne cherchera pas à calculer et que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   (e) En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

2. L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est à dire qui vérifient : AM = MA.
   (a) Montrer que les matrices qui commutent avec D sont des matrices diagonales.
   (b) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
      i. M est une matrice de $\mathscr{C}$.
      ii. $P^{-1}MP$ commute avec D.
   (c) Établir que toute matrice M de $\mathscr{C}$ est combinaison linéaire des trois matrices suivantes :
   $$P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$
   (d) En déduire que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
   (e) Montrer, en raisonnant sur les valeurs propres de A, qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de A qui soit de degré inférieur ou égal à 2. En déduire que (I, A, A^2) est libre, puis que c'est une base de $\mathscr{C}$.

Exercice 2 (d'après un vieil ECRICOME)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A. On notera P et D les matrices introduites ; on fera en sorte que les coefficients diagonaux de D soient rangés dans l'ordre croissant, et que la première ligne de P ne contienne que des « 1 » .
   Calculer P^{-1}.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $AM - MA = \lambda M \Leftrightarrow DN - ND = \lambda D$, où $N = P^{-1}MP$.
3. Déterminer les matrices N telles que $DN - ND = N$; puis les matrices M telles que $AM - MA = M$.
4. Déterminer les matrices M telles que $AM - MA = 2M$.

L'exo suivant est assez classique (à un niveau un peu plus élevé certes) : caractérisation de l'indice de nilpotence, et recherche d'une matrice X telle que $X^2 = A$, où A est nilpotente.

Exercice 3 (indice de nilpotence et racine carrée d'une matrice nilpotente)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente (*ie :* il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$).
On note $p \in \mathbb{N}^*$ son *indice de nilpotence* : c'est l'unique entier tel que $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.
On souhaite montrer que $p \leqslant n$.

1. Justifier l'existence de $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $A^{p-1}X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. On cherche à montrer que la famille $(X, AX, A^2X, \ldots, A^{p-1}X)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soient donc des réels $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant p-1}$ tels que
$$\lambda_0 X + \lambda_1 AX + \cdots + \lambda_{p-1} A^{p-1} X = 0$$
   (a) En multipliant par A^{p-1} cette relation, montrer que $\lambda_0 = 0$.
   (b) En déduire, de manière similaire, que $\lambda_1 = 0$.
   (c) Montrer par récurrence, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la propriété $\mathscr{P}(k)$: « $\forall\, i \in [\![0, k]\!],\ \lambda_i = 0$ ».
   (d) En déduire que la famille $(X, AX, A^2X, \ldots, A_{p-1}X)$ est libre.

3. Montrer que $p \leqslant n$.

4. En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors A^n est la matrice nulle.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = A$.
   Indication : on remarquera qu'une telle matrice X est nilpotente, et on cherchera à caractériser son indice de nilpotence.

Et je ne peux pas vous laisser sans un dernier.....

Exercice 4 (Probabilités, EML 1999)

On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule rouge.
À chaque tour, on tire une boule, puis on la remet dans l'urne, et on ajoute à l'urne une boule de la couleur de celle qui vient d'être tirée.
Ainsi si la première boule tirée est blanche, l'urne contiendra, avant le deuxième tirage, deux boules blanches et une boule rouge.
Les boules sont indiscernables au toucher. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

- B_n l'événement : on tire une boule blanche au n-ième tour de jeu ;
- R_n l'événement : on tire une boule rouge au n-ième tour de jeu ;
- X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors des n premiers tirages.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, quelles sont les valeurs possibles de la variable X_n ?

2. Donner la loi de probabilité de X_1.

3. Calculer les probabilités conditionnelles : $P_{B_1}(B_2)$, $P_{R_1}(B_2)$, $P_{B_1}(R_2)$, $P_{R_1}(R_2)$ (on expliquera rapidement).

4. En déduire la loi de la variable X_2.

5. On va montrer par récurrence que X_n suit la loi uniforme $\mathscr{U}([\![0, n]\!])$. L'initialisation est vue en question 2. Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$ fixé ; on suppose que $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0, n]\!])$.
   (a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Justifier que $(X_{n+1} = k) = \big((X_n = k) \cap R_{n+1}\big) \cup \big((X_n = k-1) \cap B_{n+1}\big)$.
   (b) Sachant $(X_n = k)$, quel est le contenu de l'urne avant le $(n+1)$-ème tirage ? En déduire les probabilités conditionnelles $P_{(X_n=k)}(R_{n+1})$ et $P_{(X_n=k)}(B_{n+1})$.

(c) Déduire de ce qui précède que : $\forall\, k \in [\![1, n]\!],\ P(X_{n+1} = k) = \dfrac{1}{n+2}$.

(d) Calculer $P(X_{n+1} = 0)$ et $P(X_{n+1} = n+1)$; et conclure.