Systèmes différentiels linéaires

Rappels de première année : équations différentielles linéaires

Théorème 1. *Soit* (E) *l'équation* $y' + ay = b(t)$ *et* (E_0) : $y' + ay = 0$ *l'équation homogène associée.*

1. *Les solutions de* (E_0) *sont les fonctions de la forme* $t \mapsto Ke^{-at}$, *où* K *est un réel quelconque.*
2. *Si* y_0 *est une solution de* (E) *(appelée dans ce contexte* solution particulière*) alors les solutions de* (E) *sont les fonctions de la forme* $y + y_0$, *où* y *est solution de* (E_0).

Proposition 2 (Quelques pistes de recherche de solution particulière)**.**
Dans le cas d'une équation homogène $y' + ay = b(t)$ *:*

- *si* b *est une constante, on peut rechercher une solution particulière constante ;*
- *si* b *est une fonction polynomiale, on peut rechercher une solution polynomiale de même degré ;*
- *si* $b(t) = Ke^{\alpha t}$ *(avec* $\alpha \neq -a$*) on peut rechercher une solution sous la forme* $K'e^{\alpha t}$
- *si* $b(t) = Ke^{-at}$ *on peut rechercher une solution sous la forme* $K'te^{-at}$

Théorème 3. *Soit* (E) *l'équation* $y'' + ay' + by = c(t)$ *et* (E_0) : $y'' + ay' + by = 0$ *l'équation homogène associée (*(a, b) *sont ici des constantes réelles et* c *une fonction continue).*

On appelle équation caractéristique *de* (E) *l'équation* $r^2 + ar + b = 0$ *; on suppose que cette équation admet des solutions réelles.*

1. *Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles* r_1 *et* r_2, *alors les solutions de* (E_0) *sont les fonctions de la forme* $t \mapsto K_1e^{r_1t} + K_2e^{r_2t}$, *où* (K_1, K_2) *sont deux réels quelconques.*
2. *Si l'équation caractéristique admet une seule solution réelle* r, *alors les solutions de* (E_0) *sont les fonctions de la forme* $t \mapsto (K_1t + K_2)e^{rt}$, *où* (K_1, K_2) *sont deux réels quelconques.*
3. *Si* y_0 *est une solution particulière de* (E), *alors les solutions de* (E) *sont les fonctions de la forme* $y + y_0$, *où* y *est solution de* (E_0).

Proposition 4 (Quelques pistes de recherche de solution particulière)**.**
Dans le cas d'une équation homogène $y'' + ay' + by = c(t)$ *:*

- *si* c *est une constante, on peut rechercher une solution particulière constante ;*
- *si* c *est une fonction polynomiale, on peut rechercher une solution polynomiale de même degré ;*
- *si* $c(t) = Ke^{\alpha t}$, *où* α *n'est pas solution de l'équation caractéristique, on peut rechercher une solution sous la forme* $K'e^{\alpha t}$
- *si* $c(t) = Ke^{\alpha t}$, *où* α *est* ***une des deux solutions*** *de l'équation caractéristique, on peut rechercher une solution sous la forme* $K'te^{\alpha t}$
- *si* $c(t) = Ke^{\alpha t}$, *où* α *est* ***l'unique solution*** *de l'équation caractéristique, on peut rechercher une solution sous la forme* $K't^2e^{\alpha t}$

1 Systèmes différentiels linéaires

Définition 1. *On appelle système différentiel linéaire tout système se mettant sous la forme*

$$\begin{cases} x_1' = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ x_2' = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \dots \\ x_n' = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n \end{cases}$$

Ici les x_i sont les fonctions inconnues, de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I ; et les $a_{i,j}$ sont des réels.

En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ *on réécrit ce système sous la forme* $X' = AX$, *où* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est la matrice de coefficients* $a_{i,j}$.

Définition 2. *On appelle* ***problème de Cauchy*** *la donnée d'un système différentiel et d'une* condition initiale.

Si A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, t_0 *est un réel, et* $X_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, *on appelle problème de Cauchy la recherche des X vérifiant* $\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$.

Théorème 5 (Théorème de Cauchy)**.**
Quels que soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ *et* $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, *il existe une unique solution au problème de Cauchy* $\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *entier.*

Résolution d'un système dans le cas A diagonalisable

On détermine le spectre de A et ses sous-espaces propres.

Théorème 6. *Soit le système différentiel* $X' = AX$, *où* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est diagonalisable.*
Si $(U_1, \dots, U_n)$ *est une base de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *de vecteurs propres de M, avec* U_i *associé à la valeur propre* λ_i, *alors les solutions de ce système sont les fonctions :* $t \mapsto \sum_{i=1}^{n} K_i e^{\lambda_i t} U_i$, *où* $K_1, \dots, K_n$ *sont des réels quelconques.*

Théorème 7 (Une autre méthode de résolution)**.** *Soit le système différentiel* $X' = AX$, *où* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est diagonalisable.*
Soient P inversible et D diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *telles que* $A = PDP^{-1}$, *et* $Y = P^{-1}X$. *Alors Y est solution de* $Y' = DY$ *; de sorte que*

$$Y(t) = \begin{pmatrix} K_1 e^{\lambda_1 t} \\ K_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ K_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \text{ où } K_1, \dots, K_n \text{ sont des réels quelconques}$$

On a ensuite $X(t) = PY(t)$.

Équivalence équation d'ordre 2 / système d'ordre 1

Théorème 8. *Soit* $(\mathrm{E}) \ : \ y'' + ay' + by + 0$ *et* $(\mathrm{S}) \ : \ \begin{cases} x' = -ax - by \\ y' = x \end{cases}$.

y est une solution de (E) *ssi* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *est une solution de* (S). *Autrement dit, les solutions de* (E) *sont les « secondes composantes » des solutions de* (S).

NB : ce résultat se généralise pour des équation différentielles de degré $\geqslant 2$.

Aspects qualitatifs

Définition 3.
On appelle :

- ***trajectoire d'un système différentiel*** $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ *tout ensemble de la forme* $\{\mathrm{X}(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ *où* X *est une solution du système.*
  Notamment, si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ *et une trajectoire est un ensemble de points de plan.*
- ***point d'équilibre*** *du système toute solution* $\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *constante (trajectoires réduites à un point).*
- ***trajectoire convergente*** *toute solution* $\mathrm{X} : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ *où :* $\forall\, i \in [\![1, n]\!], \ \lim\limits_{t \to +\infty} x_i(t) = \ell_i \in \mathbb{R}$.

Proposition 9.

- *Les points d'équilibre du système* $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ *sont les vecteurs de* $\mathrm{Ker}(\mathrm{A})$.
- *Corollaire : si A est inversible, le seul point d'équilibre est* $(0, 0, \ldots, 0)$.
- *Si une trajectoire est convergente, sa limite est un point d'équilibre.*
- *Si toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, toute trajectoire est convergente, et la limite est un point d'équilibre.*
- *Corollaire des précédentes : si toutes les vap de A sont strictement négatives, alors toute trajectoire converge vers* $(0, 0, \ldots, 0)$.
- *Si A admet au moins une valeur propre strictement positive, il existe des trajectoires divergentes.*