ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2023-2024
Mathématiques

Systèmes différentiels
Exercices

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes :

1. $y' + 7y = 0$
2. $y' + 7y = t$ (chercher une solution particulière sous la forme $t \mapsto at + b$)
3. $2y' - y = 0$.
4. $y'' - 5y' + 6y = 0$
5. $y'' - 5y' + 6y = e^t$ (chercher une solution particulière sous la forme $t \mapsto \mathrm{K}e^t$)
6. $y'' - 5y' + 6y = e^{3t}$ (chercher une solution particulière sous la forme $t \mapsto \mathrm{K}te^t$)
7. $4y'' = y$.

Exercice 2. Donner l'unique solution des problèmes de Cauchy suivants :

1. $y' + 7y = t$, $y(1) = -2$.
2. $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
3. $y'' - 5y' + 6y = e^{3t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
4. $4y'' = y$, , $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

(on utilisera l'exercice 1 !!)

Exercice 3.
Pour les systèmes différentiels suivants :

1. Donner l'ensemble des solutions ;
2. Donner la solution vérifiant les conditions initiales données s'il y en a ;
3. Donner les états d'équilibre, et l'ensemble des solutions convergeant vers ces états.

- $\begin{cases} x' = -4x + 3y \\ y' = -6x + 5y \end{cases}$ $\quad x(0) = 3, y(0) = 5$
- $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, y(0) = 1$
- $\begin{cases} x' = -y - z \\ y' = 2x - 3y - z \\ z' = -2x + y - z \end{cases}$ (pour diagonaliser A, on pourra discuter l'inversibilité de A et celle de $\mathrm{A} + 2\mathrm{I}_3$.)
- $\begin{cases} x' = 2x + 3y - 3z \\ y' = -3x - 4y + 3z \\ z' = 3x + 3y - 4z \end{cases}$ (pour diagonaliser B, on remarquera que $\mathrm{B}^2 + 5\mathrm{B} = -4\mathrm{I}_3$.)

Exercice 4. Soit le système différentiel (S) : $\begin{cases} x' = y + z - 4 + e^t \\ y' = -x + 2y + z - 4 + e^t \\ z' = x + z + 4 + e^t \end{cases}$.

1. Écrire ce système sous la forme $X' = AX + B(t)$ où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et B est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. En utilisant la diagonalisation de A effectuée dans l'exercice précédent, montrer qu'on peut se ramener au système $Y' = DY + P^{-1}B(t)$, où $A = PDP^{-1}$ et $Y = P^{-1}X$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (S).

Exercice 5 (Cas non diagonalisable)**.** Soit le système différentiel :

$$(S) \ : \ \begin{cases} x' = 5x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Soit f canoniquement associé à A. Écrire la matrice de f dans la base $\{(1,1),(1,0)\}$ et en déduire une matrice P inversible et une matrice T triangulaire telles que $A = PTP^{-1}$.
3. Résoudre le système différentiel suivant, de fonctions inconnues u et v : $\begin{cases} u' = 4u + v \\ v' = 4v \end{cases}$.
   On pourra commencer par obtenir la forme de $v(t)$ qu'on injectera dans la première équation, et chercher une solution particulière de cette première équation sous la forme $t \mapsto \alpha t\, e^{4t}$.
4. En déduire les solutions de (S).

Exercice 6 (Exemple d'équation non linéaire)**.**
Soient a et b deux réels > 0. On considère l'équation non linéaire suivante :

$$y' = ay(1 - by) \quad \text{(E)}$$

On cherche les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

1. Quelles sont les solutions constantes de cette équation ?
2. Soit f une solution de (E) qui ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$. On pose $z(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.
   Montrer que z est $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, et que z est solution d'une équation différentielle linéaire, notée (E′).
3. Déterminer la solution de l'équation précédente telle que $z(0) = A$. Montrer que si $A \in]0, b[$, cette solution ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.
4. En déduire alors la solution f de (E) sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f(0) = \dfrac{1}{A}$.
5. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$. Quelle valeur retrouve-t-on ?