Systèmes différentiels

Exercice 6.

$(E) : y' = ay(1-by)$ avec $a>0$, $b>0$

(équat° non linéaire)

1) $y : t \mapsto \alpha$ est une solut° ssi :

$\forall t \in [0,+\infty[$, $y'(t) = ay(t)(1-by(t))$

$\Leftrightarrow \quad 0 = a\alpha(1-b\alpha)$

dérivée d'1 constante !

$\Leftrightarrow \quad a\alpha = 0$ ou $1 - b\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \quad \alpha = 0$ ou $\alpha = 1/b$.

(car $a \neq 0$)

$\Rightarrow$ Les deux solutions constantes de (E) sont $y_1 : t \mapsto 0$
$y_2 : t \mapsto 1/b$.

2) Si f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et ne s'annule pas, alors $z = 1/f$ est $\mathcal{C}^1$ comme composée de $\mathcal{C}^1$ dont le dénom. ne s'annule pas.

On part de $f(t) = 1/z(t)$, et on écrit que f est solut° de (E).

$\forall t \geq 0 \quad , \quad f'(t) = a f(t) (1 - b f(t))$

$\Leftrightarrow \quad — \quad , \quad -\dfrac{z'(t)}{z(t)^2} = a \cdot \dfrac{1}{z(t)} \left(1 - \dfrac{b}{z(t)}\right)$

$\Leftrightarrow \quad " \quad , \quad -\dfrac{z'(t)}{z(t)^2} = \dfrac{a(z(t) - b)}{z(t)^2}$

$\Leftrightarrow \quad " \quad , \quad -z'(t) = a(z(t) - b)$

$\Leftrightarrow \underline{\forall t \geq 0 \quad , \quad z'(t) + a z(t) = ab}$:

Ainsi, $\boxed{f \text{ est solut° de } (E) \text{ ssi } z \text{ est solut° de } \underbrace{z' + az = ab}_{(E')}.}$

3) On résout (E') :

* solut° de l'équat° homogène : $z_0(t) = K e^{-at}$

* solut° particulière : on la cherche ss la forme $z_p(t)$ = constante

On trouve $z_p(t) = b$.

d'où les solut° de (E) : $\boxed{z(t) = K e^{-at} + b \quad , \quad K \in \mathbb{R}}$

$z(0) = A \quad \Leftrightarrow \quad K + b = A \quad \Leftrightarrow \quad K = A - b.$

et la solut° recherchée est : $\boxed{z(t) = (A - b) e^{-at} + b.}$

Cette dernière solut° s'annule en t ssi $(A - b) e^{-at} + b = 0$

$\Leftrightarrow \quad e^{-at} = \dfrac{b}{b - A}$ (en supposant $A \neq b$).

si $A \in]0, b[$, on a $b - A \in]0, b[$ d'où $\dfrac{b}{b - A} > 1$

Or pour $t \geq 0$ (et $a > 0$) on a $e^{-at} \leq 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Il n'existe pas de } t \geq 0 \text{ tq } g(t) = (A-b)e^{-at} + b = 0}$

4. D'après 2°), f est solut° de (E) sur $\mathbb{R}_+$, avec $f(0) = A$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{f}$ est solut° de (E') sur $\mathbb{R}_+$, avec $\left(\frac{1}{f}\right)(0) = \frac{1}{A}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{f(t)} = (A-b)e^{-at} + b$ (solut° trouvée en 3°)

$\Leftrightarrow$ $\boxed{f(t) = \frac{1}{(A-b)e^{-at} + b} \quad (\forall t \geq 0)}$

5. $a > 0$, donc avec l'expression ci-dessus :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \frac{1}{b}$$

: on retrouve une des deux solutions constantes ; et ce quelle que soit la condition initiale qu'on impose sur f en 0.
(tant que $f(0) \neq 0$)