# Exercice 3
## Systèmes différentiels

<u>Système 1</u>

$X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

On trouve $\underline{Sp(A) = \{-1, 2\} \; ; \; E_{-1}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \; ; \; E_2(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$

d'où les solut°:

$$X(t) = K_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + K_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{où } K_1, K_2 \text{ réels}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{2t} \\ y(t) = K_1 e^{-t} + 2K_2 e^{2t} \end{cases}}$$

- L'unique solut° tq $x(0) = 3$, $y(0) = 5$ est donnée par les réels $K_1$ et $K_2$ vérifiant :

$$\begin{matrix} x(0) = K_1 + K_2 = 3 \\ y(0) = K_1 + 2K_2 = 5 \end{matrix} \Leftrightarrow K_1 = 1, \; K_2 = 2$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} + 2e^{2t} \\ y(t) = e^{-t} + 4e^{2t} \end{cases}$$

- les états d'équilibre sont les él$^{ts}$ de $Ker(A)$. $0 \notin Sp(A)$ donc $A$ inversible donc $Ker(A) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$\Rightarrow$ l'unique état d'équilibre est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

En reprenant les solut° vues plus haut : $x$ et $y$ convergent vers une limite finie ssi $K_2 = 0$ (car sinon les termes $e^{2t}$ tendent vers l'infini)

Les solut° convergentes sont celles où $K_2 = 0$ ; elles convergent vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (l'état d'équilibre)

## Système 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \qquad Sp(A) = \{0, -1\} \qquad E_0(A) = \ker(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

d'où les solut° $X(t) = K_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + K_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = K_1 + K_2 e^{-t} \\ y(t) = -2K_1 - 3K_2 e^{-t} \end{cases}$$

et on a $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ ssi $K_1 = 1$ et $K_2 = -1$

Les états d'équilibre sont les vecteurs de $\ker(A)$, ici c'est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$ donc toutes les solut° convergent ; et pour $K_1, K_2$ quelconques

$$\lim_{t \to +\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 \\ -2K_1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{qui est bien un état d'équilibre.}$$

## Système 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On trouve $Sp(A) = \{0, -2\}$, $E_0(A) = \ker(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

d'où les solut° $X(t) = K_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + K_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + K_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = K_1 + K_2 e^{2t} \\ y(t) = -K_1 + K_3 e^{2t} \\ z(t) = -K_1 + (2K_2 - K_3) e^{2t} \end{cases}$$

<u>Etats d'éq</u> : $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Solut° cv : $e^{2t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ donc $x, y, z$ ont 1 limite finie ssi $\underline{\underline{K_2 = K_3 = 0}}$

Ds ce cas $\lim\limits_{t \to +\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 \\ -K_1 \\ -K_1 \end{pmatrix}$ est un état d'éq.

---

<u>Système 4</u>

$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -3 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ On trouve $\mathrm{Sp}(B) = \{-1, -4\}$

$E_{-4}(B) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; $E_{-1}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$\Rightarrow X(t) = K_1 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + K_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + K_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = K_1 e^{-4t} + K_2 e^{-t} \\ y(t) = -K_1 e^{-4t} + K_3 e^{-t} \\ z(t) = K_1 e^{-4t} + (K_2 + K_3) e^{-t}. \end{cases}$$

$0 \notin \mathrm{Sp}(B)$ donc $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Ker}(B)$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le seul état d'équilibre.

Pour $t \to +\infty$, $e^{-t}$ et $e^{-4t}$ tendant vers 0, donc <u><u>ttes</u></u> les solut° convergent vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.