ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2023-2024
Mathématiques

Sujets d'étude pendant les vacances
Corrigé

Exercice 1 (EDHEC 2014)

On note I la matrice $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. (a) *Calculatoire ; repenser au moyen de gérer le « pivot délicat » de la feuille de TD*
Montrer, grâce à la méthode du pivot de Gauss, que les valeurs propres λ de A sont les solutions de l'équation : $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$.
On effectue un pivot sur $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 7-\lambda & 5 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 6 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$.
Avec $\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_3$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 7-\lambda & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

puis : $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1$, $\mathrm{L}_3 \leftarrow 6\mathrm{L}_3 - (7-\lambda)\mathrm{L}_1$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 21 & -16+11\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{L}_3 \leftarrow 21\mathrm{L}_3 - (23+\lambda)\mathrm{L}_2$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 21 & -16+11\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 53-27\lambda-9\lambda^2+\lambda^3 \end{pmatrix} = \mathrm{T}$$

λ est valeur propre de A ssi $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3$ n'est pas inversible, donc ssi T n'est pas inversible, donc ssi $53 - 27\lambda - 9\lambda^2 + \lambda^3 = 0$.

(b) **Étudier la fonction f qui, à tout réel x associe $f(x) = x^3 - 9x^2 - 27x + 53$, puis dresser son tableau de variation (on précisera les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, on notera m le minimum local de f sur $\mathbb{R}$, M le maximum local de f sur $\mathbb{R}$ et on ne cherchera à calculer ni m, ni M).**
$f'(x) = 3x^2 - 18x - 27 = 3(x^2 - 6x - 9)$.On résout $x^2 - 6x - 9 = 0$; on trouve $\Delta = 72 = 2.6^2$ puis les racines $3 \pm 3\sqrt{2}$.

On note que $3 - 3\sqrt{2} < 0 < 3 < 3 + 3\sqrt{2}$.

Le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$		$3-3\sqrt{2}$		$3+3\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

(c) **Calculer $f(0)$ et $f(3)$ puis déterminer les signes de m et M.**

$f(0) = 53 > 0$; par décroissance stricte de f sur $[3-3\sqrt{2}, 0]$ on en déduit que $M > 0$.
$f(3) = -82 < 0$; par décroissance stricte de f sur $[3, 3+3\sqrt{2}]$ on en déduit que $m < 0$.

(d) **Montrer que A admet trois valeurs propres, que l'on ne cherchera pas à calculer et que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.**

On reprend le tableau de variation de f en se souvenant que $M > 0$ et $m < 0$. Par théorèmes de la bijection (f continue, et strictement monotone sur les intervalles qui suivent) successivement sur les intervalles $]-\infty, 3-3\sqrt{2}[, [3-3\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}]$ et $]3+3\sqrt{2}, +\infty[$ on obtient l'existence de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ réels tels que $\lambda_1 < 3-3\sqrt{2} < \lambda_2 < 3+3\sqrt{2} < \lambda_3$ et $f(\lambda_1) = f(\lambda_2) = f(\lambda_3) = 0$. Ce sont les trois seules solutions de $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

(e) **En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.**

La matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ a donc 3 valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Les trois sep associés sont de dimension 1, car la somme des dimensions de tous les sep ne peut pas excéder 3.
Si $E_{\lambda_i}(A) = \text{Vect}(C_i)$, la famille (C_1, C_2, C_3) est libre (vep pour des vap 2 à 2 distinctes) donc forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; si on définit P comme la matrice donc les colonnes sont C_1, C_2, C_3 on sait alors que P est inversible et que $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

2. **L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est à dire qui vérifient : $AM = MA$.**

(a) **Montrer que les matrices qui commutent avec D sont des matrices diagonales.**

On cherche à quelle condition $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ commute avec D.

On a $ND = \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_2 b & \lambda_3 c \\ \lambda_1 d & \lambda_2 e & \lambda_3 f \\ \lambda_1 g & \lambda_2 h & \lambda_3 i \end{pmatrix}$ et $DN = \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_1 b & \lambda_1 c \\ \lambda_2 d & \lambda_2 e & \lambda_2 f \\ \lambda_3 g & \lambda_3 h & \lambda_3 i \end{pmatrix}$ d'où $ND = DN$ ssi

$$\begin{cases} \lambda_2 b = \lambda_1 b \\ \lambda_3 c = \lambda_1 c \\ \lambda_1 d = \lambda_2 d \\ \lambda_3 f = \lambda_2 f \\ \lambda_1 g = \lambda_3 g \\ \lambda_2 h = \lambda_3 h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda_2 - \lambda_1) b = 0 \\ (\lambda_3 - \lambda_1) c = 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_2) d = 0 \\ (\lambda_3 - \lambda_2) f = 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_3) g = 0 \\ (\lambda_2 - \lambda_3) h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = c = d = f = g = h = 0$$

CAR $\lambda_1 - \lambda_2$, $\lambda_1 - \lambda_3$ et $\lambda_2 - \lambda_3$ sont non nuls !!

On obtient bien que tous les coefficients non diagonaux de N sont nuls : les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

(b) **Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :**

i. M **est une matrice de $\mathcal{C}$.**

ii. $P^{-1}MP$ **commute avec** D.

Par équivalences successives :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow AM = MA \\ &\Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \\ &\Leftrightarrow DP^{-1}M = P^{-1}MPDP^{-1} \quad \text{(on multiplie à gauche par } P^{-1} \text{ inversible)} \\ &\Leftrightarrow DP^{-1}MP = P^{-1}MPD \quad \text{(on multiplie à droite par P inversible)} \end{aligned}$$

On a donc bien :$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow P^{-1}MP$ commute avec D.

(c) **Établir que toute matrice M de $\mathscr{C}$ est combinaison linéaire des trois matrices suivantes :**

$$P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

D'après les questions précédentes, M est dans $\mathscr{C}$ ssi $P^{-1}MP$ commute avec D, donc ssi $P^{-1}MP$ est diagonale.

Ceci équivaut à $P^{-1}MP = a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + e\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ soit encore à

$$M = a \times P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1} + e \times P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1} + i \times P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

On obtient donc $\mathscr{C} = \text{Vect}\left(P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}\right)$.

(d) **En déduire que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.**

$\mathscr{C}$ est un espace engendré d'après la ligne précédente : c'est donc un sev de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Montrons que la famille $P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$ est libre : si on a

$$\alpha P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1} + \beta P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1} + \gamma P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1} = 0$$

alors $P\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}P^{-1} = 0$ en en multipliant par P à droite et P^{-1} à gauche on trouve $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$\left(P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}\right)$ est donc une base de $\mathscr{C}$ ce qui montre que cet espace est de dimension 3.

(e) **Montrer, en raisonnant sur les valeurs propres de A, qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de A qui soit de degré inférieur ou égal à 2. En déduire que (I, A, A^2) est libre, puis que c'est une base de $\mathscr{C}$.**

D'après le cours, si Q est un polynôme annulateur de A, λ_1, λ_2 et λ_3 sont des racines de Q. Comme ces 3 vap sont 2 à 2 distinctes, et que Q est un polynôme non nul, il faut forcément que $\deg(Q) \geqslant 3$.
Ainsi il n'existe pas de polynôme annulateur de A non nul de degré $\leqslant 2$.
Supposons alors qu'il existe une combi linéaire nulle de I, A, A^2 :

$$\alpha I + \beta A + \gamma A^2 = 0$$

Ceci montre que $\alpha + \beta X + \gamma X^2$ est annulateur de A : d'après ce qu'on vient de dire cela impose que c'est le polynôme nul, donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
(I, A, A^2) est donc libre.

Donc $\dim(\text{Vect}(I, A, A^2)) = 3$. Mais comme I, A, A^2 commutent avec A (c'est évident) on a $\text{Vect}(I, A, A^2) \subset \mathscr{C}$ et on vient de voir que $\dim(\text{Vect}(I, A, A^2)) = \dim(\mathscr{C})$.
Ceci montre que $\text{Vect}(I, A, A^2) = \mathscr{C}$, et donc que (I, A, A^2) est une base de $\mathscr{C}$.

Exercice 2 (d'après un vieil ECRICOME)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1. **Diagonaliser A. On notera P et D les matrices introduites ; on fera en sorte que les coefficients diagonaux de D soient rangés dans l'ordre croissant, et que la première ligne de P ne contienne que des « 1 » .**
   Calculer P^{-1}**.**

   Par des méthodes usuelles $\mathrm{Sp}(A) = \{0,1\}$, $E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on obtient l'unique possibilité $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   On trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2. **Soit** $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$**, et** $\lambda \in \mathbb{R}$**. Montrer que** $AM - MA = \lambda M \Leftrightarrow DN - ND = \lambda D$**, où** $N = P^{-1}MP$**.**
   Comme dans l'exercice précédent avec ldes multiplications par P, P^{-1} inversibles :

$$\begin{aligned} AM - MA = \lambda M &\Leftrightarrow PDP^{-1}M - MPDP^{-1} = \lambda M \\ &\Leftrightarrow P^{-1}(PDP^{-1}M - MPDP^{-1})P = P^{-1}\lambda MP \\ &\Leftrightarrow DP^{-1}MP - P^{-1}MPD = P^{-1}\lambda MP \\ &\Leftrightarrow DN - ND = \lambda N \end{aligned}$$

Typo!!

3. **Déterminer les matrices N telles que** $DN - ND = N$ **; puis les matrices M telles que** $AM - MA = M$**.**
   Avec $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a rapidement $DN - ND = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ et donc $DN - ND = N$ ssi $a = d = 0$, $b = -b$; d'où $a = b = d = 0$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$.
   Ensuite on utilise la question précédente :

$$AM - MA = M \Leftrightarrow DN - ND = N \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}MP \Leftrightarrow M = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \dots$$

4. **Déterminer les matrices M telles que** $AM - MA = 2M$**.**
   On commence ici aussi par résoudre $DN - ND = 2N$, ce qui avec les notations précédentes équivaut à

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   et on voit que seule la matrice nulle est solution.
   On revient ensuite au problème demandé :

$$AM - MA = 2M \Leftrightarrow DN - ND = 2N \Leftrightarrow N = 0 = P^{-1}MP \Leftrightarrow M = 0$$

   et la seule solution est la matrice nulle.

Exercice 3 (indice de nilpotence et racine carrée d'une matrice nilpotente)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente (*ie :* il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$).
On note $p \in \mathbb{N}^*$ son *indice de nilpotence* : c'est l'unique entier tel que $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.
On souhaite montrer que $p \leqslant n$.

1. **Justifier l'existence de $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $A^{p-1}X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.**

   La matrice A^{p-1} est non nulle, donc elle a un coefficient $m_{i,j}$ non nul.
   Si E_j est la colonne où tous les coefficients sont nuls sauf le j-ème, alors $A^{p-1}E_i$ est égal à la j-ème colonne de A^{p-1} et est donc non nulle.

2. **On cherche à montrer que la famille $(X, AX, A^2X, \dots, A^{p-1}X)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soient donc des réels $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant p-1}$ tels que**
$$\lambda_0 X + \lambda_1 AX + \cdots + \lambda_{p-1}A^{p-1}X = 0$$

   (a) **En multipliant par A^{p-1} cette relation, montrer que $\lambda_0 = 0$.**

   En multipliant par A^{p-1} on obtient
$$\lambda_0 A^{p-1}X + \lambda_1 A^p X + \lambda_2 A^{p+1}X \cdots + \lambda_{p-1}A^{2p-2}X = 0$$

   Or $A^p = 0$ et par suite : $\forall\, k \geqslant p,\ A^k = A^p A^{k-p} = 0$. Tous les termes de la somme sont nuls, sauf le premier ! On trouve $\lambda_0 A^{p-1}X = 0$ et comme par hypothèse $A^{p-1}X \neq 0$ on a forcément $\lambda_0 = 0$.

   (b) **En déduire, de manière similaire, que $\lambda_1 = 0$.**
   La relation est donc maintenant :
$$\lambda_1 AX + \cdots + \lambda_{p-1}A^{p-1}X = 0$$
   et en multipliant par A^{p-2} :
$$\lambda_1 A^{p-1}X + \cdots + \lambda_{p-1}A^{2p-3}X = 0$$
   Ici encore cela se réduit à $\lambda_1 A^{p-1}X = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$.

   (c) **Montrer par récurrence, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la propriété $\mathcal{P}(k)$: « $\forall\, i \in [\![0,k]\!],\ \lambda_i = 0$ » .**
   $\mathcal{P}(0)$ est vue en 2a.
   Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie, avec $0 \leqslant k \leqslant p-2$. Avec $\lambda_0 = \dots = \lambda_k = 0$, la relation de liaison s'écrit :
$$\lambda_{k+1}A^{k+1}X + \cdots + \lambda_{p-1}A^{p-1}X = 0$$
   On multiplie cette fois par A^{p-k-2} et on obtient $\lambda_{k+1}A^{p-1}X = 0$ et donc $\lambda_{k+1} = 0$. Comme on avait déjà $\lambda_0 = \dots = \lambda_k = 0$, on en déduit $\mathcal{P}(k+1)$. D'où l'hérédité, et la conclusion.

   (d) **En déduire que la famille $(X, AX, A^2X, \dots, A_{p-1}X)$ est libre.**
   $\mathcal{P}(p-1)$, montré à la question précédente, dit précisément que tous les coefficients de la relation de liaison $\lambda_0 X + \lambda_1 AX + \cdots + \lambda_{p-1}A^{p-1}X = 0$ sont nuls : ceci montre la liberté voulue.

3. **Montrer que $p \leqslant n$.**
   $(X, AX, A^2X, \dots, A_{p-1}X)$ est une famille libre à p vecteurs, dans l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension n. La théorie de la dimension nous permet alors de conclure que $p \leqslant n$.

4. **En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors A^n est la matrice nulle.**
   $p \leqslant n$ donc $A^n = A^p A^{n-p} = 0 \times A^{n-p} = 0$.

5. **Soit** $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ **telle que** $A^2 \neq 0$ **et** $A^3 = 0$. **Montrer qu'il n'existe pas de matrice** $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ **telle que** $X^2 = A$.
   Indication : on remarquera qu'une telle matrice X est nilpotente, et on cherchera à caractériser son indice de nilpotence.

   Si $X^2 = A$, alors $X^6 = A^3 = 0$ donc X est nilpotente. Or $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; d'après ce qu'on vient de voir on a forcément $X^3 = 0\cdot$ Mais on voit que $X^4 = A^2 \neq 0$: c'est absurde !
   Une telle matrice X n'existe donc pas.

Exercice 4 (Probabilités, EML 1999)

On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule rouge.
À chaque tour, on tire une boule, puis on la remet dans l'urne, et on ajoute à l'urne une boule de la couleur de celle qui vient d'être tirée.
Ainsi si la première boule tirée est blanche, l'urne contiendra, avant le deuxième tirage, deux boules blanches et une boule rouge.
Les boules sont indiscernables au toucher. Pour $n \in \mathbb{N}^*$**, on note :**

- B_n **l'événement : on tire une boule blanche au** n**-ième tour de jeu ;**
- R_n **l'événement : on tire une boule rouge au** n**-ième tour de jeu ;**
- X_n **la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors des** n **premiers tirages.**

1. **Pour** $n \in \mathbb{N}^*$ **donné, quelles sont les valeurs possibles de la variable** X_n **?**

   Il y a toujours des boules blanches et des boules rouges dans l'urne : on a donc $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

2. **Donner la loi de probabilité de** X_1**.**

   Rappelons que $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$.
   Au 1er tirage, l'urne contient une blanche et une rouge : il y a donc une chance sur 2 de tirer la blanche (équiprobabilité).
   Donc $P(X_1 = 0) = P(R_1) = \frac{1}{2}$, et $P(X_1 = 1) = P(B_1) = \frac{1}{2}$.

3. **Calculer les probabilités conditionnelles :** $P_{B_1}(B_2)$, $P_{R_1}(B_2)$, $P_{B_1}(R_2)$, $P_{R_1}(R_2)$ **(on expliquera rapidement).**

   Sachant l'événement B_1 (on a tiré une blanche au premier tirage), l'urne contient 2 blanches et une rouge avant le second tirage : on en déduit donc

   $$P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad P_{B_1}(R_2) = \frac{1}{3}$$

   De même :

   $$P_{R_1}(B_2) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P_{R_1}(R_2) = \frac{2}{3}$$

4. **En déduire la loi de la variable** X_2**.**

   $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

   - $(X_2 = 0)$ est l'événement où on ne tire aucune boule blanche en 2 tirages ; c'est donc $R_1 \cap R_2$.
     Par probas composées :

     $$P(X_2 = 0) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

   - $(X_2 = 1) = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)$; ces deux événement étant incompatibles.
     On a donc

     $$P(X_2 = 1) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(R_2) + P(R_1)P_{R_1}(B_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

   - Enfin, $(X_2 = 2) = B_1 \cap B_2$ d'où

     $$P(X_2 = 2) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

On voit donc que X_2 suit la loi uniforme sur $\{0,1,2\}$.

5. **On va montrer par récurrence que X_n suit la loi uniforme $\mathscr{U}(\llbracket 0,n\rrbracket)$. L'initialisation est vue en question 2. Soit donc $n\in\mathbb{N}^*$ fixé ; on suppose que $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0,n\rrbracket)$.**

   (a) **Soit $k\in\llbracket 1,n\rrbracket$. Justifier que $(X_{n+1}=k)=\big((X_n=k)\cap R_{n+1}\big)\cup\big((X_n=k-1)\cap B_{n+1}\big)$.**

   On a l'événement $(X_{n+1}=k)$ ssi l'une de ces deux situations se produit :

   - On tire k blanches dans les n premiers tirages ; puis une rouge au $(n+1)$-ème tirage : événement $(X_n=k)\cap R_{n+1}$;
   - On tire $k-1$ blanches dans les n premiers tirages ; puis une blanche au $(n+1)$-ème tirage : événement $(X_n=k-1)\cap B_{n+1}$.

   D'où l'égalité recherchée.

   (b) **Sachant $(X_n=k)$, quel est le contenu de l'urne avant le $(n+1)$-ème tirage ? En déduire les probabilités conditionnelles $P_{(X_n=k)}(R_{n+1})$ et $P_{(X_n=k)}(B_{n+1})$.**

   Si $(X_n=k)$, on a tiré dans les n premiers tirages k blanches et $n-k$ rouges ; dont ajouté autant de boules ; l'urne qui contenant initialement 1 blanche et une rouge contient donc à l'issue du n-ième tirage $k+1$ blanches et $n-k+1$ rouges. (et donc au total $n+2$ boules)
   $P_{(X_n=k)}(R_{n+1})$ est la proba de tirer une rouge dans cette urne ; on a donc

   $$P_{(X_n=k)}(R_{n+1})=\frac{n-k+1}{n+2}\qquad\text{et de même :}\qquad P_{(X_n=k)}(B_{n+1})=\frac{k+1}{n+2}$$

   (c) **Déduire de ce qui précède que : $\forall\, k\in\llbracket 1,n\rrbracket,\ P(X_{n+1}=k)=\dfrac{1}{n+2}$.**

   On sait que : $(X_{n+1}=k)=\big((X_n=k)\cap R_{n+1}\big)\cup\big((X_n=k-1)\cap B_{n+1}\big)$; avec incompatibilité entre ces deux événements.
   Donc :

   $$P(X_{n+1}=k)=P\big((X_n=k)\cap R_{n+1}\big)+P\big((X_n=k-1)\cap B_{n+1}\big)$$

   et en utilisant les probas conditionnelles précédentes :

   $$P(X_{n+1}=k)=P(X_n=k)P_{(X_n=k)}(R_{n+1})+P(X_n=k-1)P_{(X_n=k-1)}(B_{n+1})$$

   Or on a supposé que $X\hookrightarrow\mathscr{U}(\llbracket 0,n\rrbracket)$; donc $P(X_n=k)=P(X_n=k-1)=\dfrac{1}{n+1}$.
   Avec les valeurs de la question précédente il vient finalement :

   $$\begin{aligned}P(X_{n+1}=k)&=P(X_n=k)P_{(X_n=k)}(R_{n+1})+P(X_n=k-1)P_{(X_n=k-1)}(B_{n+1})\\&=\frac{1}{n+1}\frac{n-k+1}{n+2}+\frac{1}{n+1}\frac{k+1}{n+2}\\&=\frac{1}{n+1}\left(\frac{n-k+1}{n+2}+\frac{k+1}{n+2}\right)\\&=\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+2}{n+2}\right)\\P(X_{n+1}=k)&=\frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

   (d) **Calculer $P(X_{n+1}=0)$ et $P(X_{n+1}=n+1)$; et conclure.**

   Pour ces valeurs «extrêmes», une des deux alternatives évoquées en 5a n'a pas lieu :
   $(X_{n+1}=0)$ (on ne tire que des rouges) a lieu ssi $X_n=0$, et si on tire encore une rouge au $(n+1)$-ème tirage ; donc

   $$(X_{n+1}=0)=(X_n=0)\cap R_{n+1}$$

   puis (avec les probas conditionnelles de 5b) :

   $$P(X_{n+1}=0)=P(X_n=0)P_{(X_n=0)}(R_{n+1})=\frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{n+2}$$

   et par un raisonnement similaire : $(X_{n+1}=n+1)=(X_n=n)\cap B_{n+1}$, donc :

   $$P(X_{n+1}=n+1)=P(X_n=n)P_{(X_n=n)}(B_{n+1})=\frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{n+2}$$

On a donc bien :

$$\forall\, k \in [\![0, n+1]\!],\ \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k) = \frac{1}{n+2}$$

et donc $\mathrm{X}_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0, n+1]\!])$; ceci achève l'hérédité de notre récurrence.
On peut donc conclure que pour tout entier $n \geqslant 1$, X_n suit la loi uniforme $\mathscr{U}([\![0, n]\!])$.