Chaînes de Markov
Exercices

Exercice 1. Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable noté 1 et l'état excité noté 2. À chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est 0,01. Mais l'on ne connaît pas en revanche, la probabilité a de changement de l'état excité à l'état stable. On note a cette probabilité supposée constante. Soit la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décrivant les états de l'atome.

1. Donner, en fonction de a, la matrice de transition A de cette chaîne.

2. Après un temps très long, dans le milieu, la proportion d'atomes excités se stabilise autour de 2%. Déterminer la valeur de a.

On va maintenant montrer que toute distribution initiale converge vers l'état stable. Soit A la matrice de transition de la chaîne de Markov décrite ici.
Intermède : la trace. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$ la somme des coefficients diagonaux de M : c'est la *trace* de M.

3. Dans le cas $n = 2$, montrer que pour toutes matrices A, B, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. On admet que c'est encore vrai sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (bonus : le démontrer !)

4. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.

On suppose maintenant $a \in]0,1[$ quelconque.
On va utiliser quelques moyens détournés[1] pour obtenir le spectre de A.
D'après le cours, on sait que $1 \in \mathrm{Sp}(M)$. On *suppose* que A est diagonalisable.

5. Montrer que l'autre[2] valeur propre de A, notée λ, vérifie $1 + \lambda = 1,99 - a$.

6. En déduire la valeur de λ.

7. Vérifier que ce λ est bel et bien une valeur propre de A, différente de 1.
On dit qu'on a raisonné par analyse-synthèse : en supposant la diagonalisabilité on a déterminé l'unique valeur propre possible ; puis on a vérifié que c'en était bien une.

8. Montrer que $\lambda \in]-1,1[$.

On considère $E \in E_1({}^tA)$ et $F \in E_\lambda({}^tA)$ non nuls (on rappelle qu'A et ${}^tA$ ont même spectre). Soit $U_0 \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'état probabiliste initial de la chaîne de Markov ; on sait qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n U_0$$

Soient (α, β) les coordonnées de U_0 dans la base (E, F) : on a donc $U_0 = \alpha E + \beta F$.

9. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \alpha E + \beta\lambda^n F$.

10. En déduire que (U_n) converge vers un vecteur propre de ${}^tA$ pour la valeur propre 1.

On peut montrer que si U_0 est un état probabiliste (composantes $\geqslant 0$, de somme 1) alors tous les U_n le sont, et la limite l'est également. Ceci permet de conclure à la convergence de U_n vers l'unique état stable de la chaîne, quel que soit l'état initial U_0.

[1] OK, en 2×2 ce n'est pas le plus habile, mais ça permet de mobiliser des arguments utiles dans un contexte simple.
[2] qui, à ce stade du raisonnement, peut en fait être la même...

Exercice 2. On reprend l'exemple de cours où on effectue une succession de lancers indépendants d'une pièce à Pile (proba $\frac{1}{3}$) ou Face (proba $\frac{2}{3}$) ; pour $n \geqslant 2$ on définit X_n la variable aléatoire égale à :

- 1 si les deux derniers lancers ont donné PP ;
- 2 si les deux derniers lancers ont donné PF ;
- 3 si les deux derniers lancers ont donné FP ;
- 4 si les deux derniers lancers ont donné FF.

On voit que $(X_n)_{n\geqslant 2}$ est une chaîne de Markov.

1. Rappeler son graphe et sa matrice de transition.
2. Déterminer l'état stable de cette chaîne.
3. Généraliser pour une pièce donnant Pile avec proba p et Face avec proba $q = 1 - p$.

Exercice 3 (Problème du collectionneur)**.** On s'intéresse à un collectionneur de vignettes de paquets de céréales. Il y a 3 vignettes différentes. Dans chaque paquet il y a une vignette prise au hasard de manière équiprobable parmi les 3. À l'instant 0 le collectionneur n'a aucune vignette. À chaque instant n il achète un paquet ; s'il obtient une vignette qu'il n'a jamais eu, il la garde, sinon il la jette.
On note X_n le nombre de vignettes que possède le collectionneur après l'achat de n paquets de céréales (on considère que l'expérience se poursuit indéfiniment, même quand il a la collection complète).

1. Montrer que la suite de variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ; donner son graphe et sa matrice de transition, notée M.
2. En notant $V_n = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n = 0) & \mathbb{P}(X_n = 1) & \mathbb{P}(X_n = 2) & \mathbb{P}(X_n = 3)\end{pmatrix}$, redémontrer la formule de cours : $V_{n+1} = V_n M$.
3. Que vaut V_0 ?
4. Déterminer (sans calcul !) le spectre de M. Donner tous les états stables de la chaîne.
5. Diagonaliser A. En déduire la première ligne de M^n pour tout entier n ; puis la probabilité que le collectionneur complète sa collection après l'achat de n paquets.
6. Pour tout $i \in [\![0,3]\!]$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = i)$. Cela vous parait-il raisonnable ?
   NB : on dit que la suite de variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi* vers une variable constante égale à 3.
7. Calculer $E(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. On considère deux urnes : la première contient 3 boules blanches, et la seconde trois boules noires. On répète indéfiniment l'expérience suivante : on tire au hasard une boule dans U_1, une boule dans U_2, et on les met dans l'autre urne (on fait donc un échange).
On note X_n le nombre de boules blanches dans l'urne 1 à l'issue de n échanges.

1. Calculer $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = i)$, et $P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = i)$ pour $i \in [\![0,3]\!]$.
2. Montrer que si $|i - j| > 1$, $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = 0$.
3. Si $X_n = 1$, quel est le contenu des deux urnes ? En déduire $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2)$ et $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)$.
4. Finir de déterminer tous les $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$ pour $(i, j) \in [\![0,3]\!]^2$.
5. Montrer que la suite (X_n) est une chaîne de Markov dont on donnera le graphe et la matrice de transition M.
6. Montrer que $\mathrm{rg}(M - I_4) \geqslant 3$. En déduire que le sous-espace propre de ${}^tM$ pour la valeur propre 1 est de dimension 1.
7. Déterminer l'unique état stable de cette chaîne.

Exercice 5 (Une ébauche de PageRank)**.** On considère 4 pages Web reliées par les liens hypertexte suivants :

- La page P_1 contient un lien vers P_2, un lien vers P_3 et un lien vers P_4 ;
- La page P_2 contient un lien vers P_1 et un lien vers P_3.
- La page P_3 contient un lien vers P_4 ;
- La page P_4 contient un lien vers P_1 et un lien vers P_3.

Une personne surfe sur ce mini-Internet ; à chaque étape il clique au hasard, de manière équiprobable, sur un des liens de la page qu'il consulte.

1. Sa position au temps n est donc une chaîne de Markov ; donner son graphe et sa matrice de transition.
2. L'algorithme PageRank assigne alors à chaque page un score, donné par la distribution invariante de la chaîne de Markov. Quelle est la page obtenant le score le plus élevé ?
3. Ce modèle est imparfait... Comment créer, très simplement, une page Web obtenant un score très élevé ?