DS 3 bis

Corrigé.

Problème 1

Partie 1 : $m=4$

1a. $p_{0,0}$ est la proba que, sachant qu'à 1 jour donné, personne ne vote pour A, ce soit encore le cas au jour suivant.

Il est clair que $\boxed{p_{0,0}=1}$: personne n'est là pour convaincre les électeurs de B de changer d'avis.

De même, $\boxed{p_{4,4}=1}$

1b. D'après les règles données, au plus 1 électeur change d'avis d'un jour sur l'autre.

si $|i-j|>1$, $p_{i,j}$ est la proba que A gagne ou perde au ⊕ 2 électeurs : elle est nulle.

$$\boxed{|i-j|\geq 2 \Rightarrow p_{i,j}=0}$$

1c. $p_{1,0}$: proba que si on a 3 électeurs de B et 1 électeur de A un jour donné, on n'ait que des électeurs de B au jour suivant.

Pour cela, il faut que E_1 soit un électeur de B (évt $\overline{A_1}$)

et que E_2 ———————— A (évt A_2)

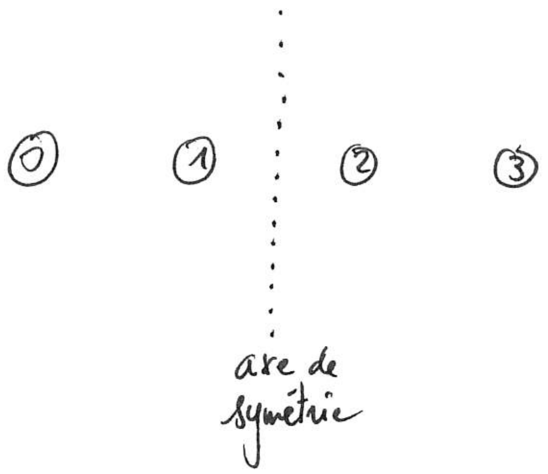
Avec cette même symétrie :

$p_{1,2} = p_{3,2}$

$p_{3,3} = p_{1,1}$

$p_{2,3} = p_{2,1}$

et j'en oublie peut-être



2a. La formule des probas totales avec le SCE $((X_n = i))_{\underline{\underline{i \in [\![0,4]\!]}}}$ ⚠ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) = \; & \underbrace{P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1)}_{p_{0,1}} P(X_n = 0) \\ & + p_{1,1} P(X_n = 1) \\ & + p_{2,1} P(X_n = 2) \\ & + p_{3,1} P(X_n = 3) \\ & + p_{4,1} P(X_n = 4) \end{aligned}$$

Avec les valeurs trouvées :

$$\boxed{P(X_{n+1} = 1) = 0 + \frac{1}{2} P(X_n = 1) + \frac{1}{3} P(X_n = 2) + 0 + 0}$$

de même $P(X_{n+1} = 2) = 0 + p_{1,2} P(X_n = 1) + p_{2,2} P(X_n = 2) + p_{3,2} P(X_n = 3) + 0$

$$= \frac{1}{4} P(X_n = 1) + \frac{1}{3} P(X_n = 2) + \frac{1}{4} P(X_n = 3)$$

et $P(X_{n+1} = 3) = 0 + 0 + p_{2,3} P(X_n = 2) + p_{3,3} P(X_n = 3) + 0$

$$= \frac{1}{3} P(X_n = 2) + \frac{1}{2} P(X_n = 3)$$

$$P_{1,0} = P(\overline{A_1} \cap A_2)$$
$$= P(\overline{A_1})\, P_{\overline{A_1}}(A_2)$$
$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

3 électeurs de B parmi 4

1 électeur de A parmi les 3 restants

Par les mêmes considérations :

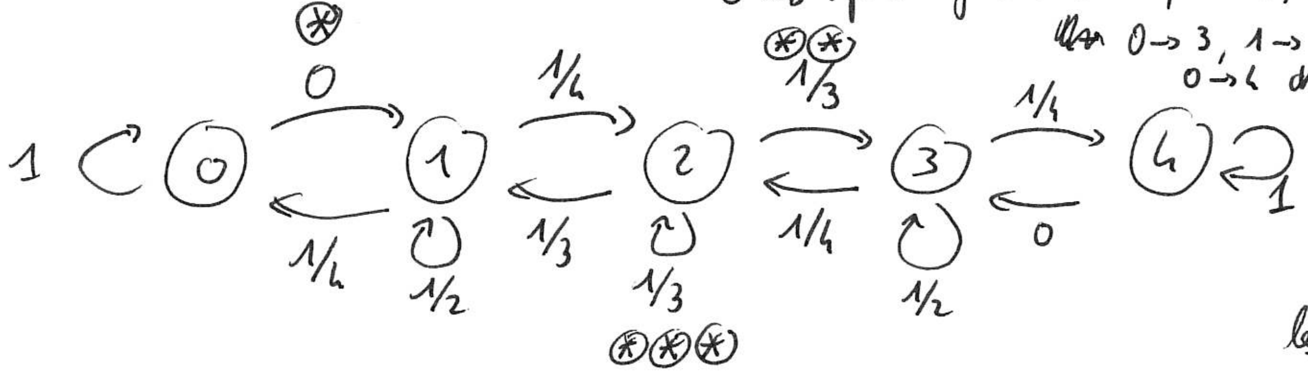
$$P_{1,2} = P(A_1 \cap \overline{A_2})$$
$$= P(A_1)\, P_{A_1}(\overline{A_2})$$
$$= \frac{1}{4} \times 1$$
$$\boxed{P_{1,2} = \frac{1}{4}}$$

$$P_{1,1} = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2})$$

(incompatibilité)

$$= \frac{1}{4} \times 0 + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$$
$$\boxed{P_{1,1} = \frac{1}{2}}$$

[NB : pas de flèches 0 → 2, 1 → 3, 2 → 4 ni 0 → 3, 1 → 4 0 → 4 d'après 1b] et idem pour les flèches vers la gauche]



⊛ : $P_{0,1}$: proba d'apparit° spontanée d'1 électeur de A si tt le monde vote B : elle est nulle

⊛⊛ $P_{2,3} = P(A_1 \cap \overline{A_2}) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

⊛⊛⊛ $P_{2,2} = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

etc...

[NB : on peut justifier que $P_{3,4} = P_{1,0}$ par symétrie entre les candidats A et B]

Avec ces 3 égalités on vérifie que $U_{n+1} = MU_n$.

2b. Récurrence facile sur $n \in \mathbb{N}$ (mais vous devez la rédiger !)

2c. $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$

En forçant un peu on peut remarquer que $C_1 + C_3$ est colinéaire à C_2 ... mais sinon on peut déterminer $\mathrm{Ker}(M)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M) \iff \begin{cases} x/2 + y/3 = 0 \\ x/4 + y/3 + z/4 = 0 \\ y/3 + z/2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -\frac{3}{2} x \\ x/4 - x/2 + z/4 = 0 \\ y = -\frac{3}{2} z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -3/2\, x \\ z = x & \text{d'après } L_1 \text{ et } L_3 \\ 0 = 0 & \text{en reportant cela ds } L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -3/2\, x \\ z = x \end{cases}$$ et on a une $\underline{\infty^{\text{té}} \text{ de solutions}}$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(M) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow M \text{ n'est pas inversible} \Rightarrow 0 \in \mathrm{Sp}(M)}$$

- $M - \frac{1}{2} I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & -1/6 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

$C_1 = C_3$ donc $\boxed{M - \frac{1}{2} I_3 \text{ n'est pas inversible} \Rightarrow \frac{1}{2} \in Sp(M)}$

- $M \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 + 1/3 \\ 1/4 + 1/3 + 1/4 \\ 1/3 + 1/2 \end{pmatrix} = \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\frac{5}{6} \in Sp(M)}$

On a 3 valeurs propres ~~et~~ et $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Comme $\sum \dim(E_\lambda(M)) \leq 3$ les 3 ss-espaces propres sont de dimension 1 ; et les 3 bases de ces SEP forment 1 base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à cette base :

$M = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/6 \end{pmatrix}$ avec $0 < \frac{1}{2} < \frac{5}{6}$ comme demandé

$$\boxed{\alpha = 0, \quad \beta = 1/2, \quad \gamma = 5/6}$$

2d. Par récurrence on montre que $M^n = PD^nP^{-1}$

$$U_n = M^n U_0 \iff U_n = PD^nP^{-1}U_0$$

$$\Rightarrow P^{-1}U_n = D^n P^{-1} U_0$$

Avec $D^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & & (0) \\ & \beta^n & \\ (0) & & \gamma^n \end{pmatrix}$, $P^{-1}U_n$ est une colonne dont les composantes sont combi. lin. de $\alpha^n, \beta^n, \gamma^n$

donc $\boxed{U_n = P(P^{-1} U_n)}$ l'est aussi.

⑥

2e. $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$ avec les valeurs trouvées

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha^n = \lim\limits_{n\infty} \beta^n = \lim\limits_{n\infty} \gamma^n = 0$

$\Rightarrow \forall k \in \{1,2,3\}$, $P(X_n = k) \xrightarrow{n\infty} 0$

car les $P(X_n = k)$ sont des combinaisons linéaires de suites tendant vers 0.

3. Comme loi de probabilité :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X_n = 0) + P(X_n = 1) + \dots + P(X_n = 4) = 1$.

Pour $n \to +\infty$, les 3 termes centraux tendent vers 0.

On obtient donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 0) + P(X_n = 4) = 1$

ce qui signifie que pour un temps assez long on est presque sûrement ds l'état $(X_n = 0)$ ou $(X_n = 4)$, pour lesquels tous les électeurs ont le même avis.

Partie II

4a. Similaire à la question 1.

Sachant $(X_n=k)$, la foule contient k électeurs de A

m-k —— B.

$P_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k+1)$ est la proba que E_1 vote A

et E_2 vote B

$$\text{donc c'est } P(A_1\cap\overline{A_2}) = P(A_1)\,P_{A_1}(\overline{A_2})$$
$$= \frac{k}{m}\times\frac{m-k}{m-1} = \frac{k(m-k)}{m(m-1)}$$

de même $P_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k-1) = P(\overline{A_1}\cap A_2) = \dfrac{m-k}{m}\times\dfrac{k}{m-1} = \dfrac{k(m-k)}{m(m-1)}$

et comme si $i\notin\{k,k+1,k-1\}$, $P_{(X_n=k)}(X_{n+1}=i)=0$

$$P_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k) = 1 - P_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k+1) - P_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k-1)$$
$$= \underline{1-\frac{2k(m-k)}{m(m-1)}}$$

4b. On écrit une formule des probas totales avec le SCE $\left((X_n=i)\right)_{i\in[\![0,m]\!]}$

$$\Pi_{n+1,k} = P(X_{n+1}=k) = \sum_{i=0}^{m}\underbrace{P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=k)\times P(X_n=i)}_{\text{nul si } i\notin\{k-1,k,k+1\}}$$
$$= P_{(X_n=k-1)}(X_{n+1}=k)\times\Pi_{n,k-1}$$
$$+\ P_{(X_n=k)}(\ \text{〃}\ )\times\Pi_{n,k}$$
$$+\ P_{(X_n=k+1)}(\ -\ )\times\Pi_{n,k+1}$$

$$= \underbrace{\frac{(k-1)(m-k+1)}{m(m-1)}}_{\substack{\text{1° formule de 4a}\\ \text{au rang } k-1}} \Pi_{n,k-1} + \Big(\underbrace{1 - \frac{2k(m-k)}{m(m-1}}_{\substack{\text{3° formule}\\ \text{de 4a}}}\Big)\Pi_{n,k} + \underbrace{\frac{(k+1)(m-k-1)}{m(m-1)}}_{\substack{\text{2° formule}\\ \text{de 4a}\\ \text{au rg } k+1}} \times \Pi_{n,k+1}$$

→ En mettant au même dénominateur on trouve ce qu'il faut.

5a. Soit $\mathcal{P}(n)$ cette inégalité.

- $\mathcal{P}(0)$ s'écrit $\Pi_{0,k} \leq 1$: vrai car $\Pi_{0,k}$ est une probabilité
- si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, 4b donne : [et s'applique avec les condit° données sur k]

$$\Pi_{n+1,k} \leq \frac{(k-1)(m+1-k) + [m(m-1) - 2k(m-k)] + (k+1)(m-k-1)}{m(m-1)} \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

(tous les $\Pi_{n,\dots}$ se majorent par la m̂ quantité)

$$\leq \frac{\cancel{mk} + \cancel{k} - \cancel{k^2} - m - 1 + \cancel{k} + m^2 - \cancel{m} - \cancel{2mk} + \cancel{2k^2} + \cancel{mk} - \cancel{k^2} - \cancel{k} + \cancel{m} - \cancel{k} - 1}{m(m-1)} \times \left(\quad\right)^n$$

$$\leq \frac{m^2 - m - 2}{m(m-1)} \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

$$\leq \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1}$$

ce qui établit l'hérédité puis le résultat.

5b $m(m-1)-2 < m(m-1)$

donc $\left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right) < 1$

et $\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)} \geq 0$ car $m \geq 2$.

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n = 0$

$\Pi_{n,k} \geq 0$ comme probabilité donc par encadrement :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, m-1]\!], \lim_{n \to +\infty} \Pi_{n,k} = 0}$$

6a. l'év^t V_A est réalisé ssi il existe un jour n tel que tous les électeurs votent A au jour n ; ce qui est l'év^t $(X_n = m)$
En effet si ceci a lieu la situat° n'évolue plus.

Ainsi $\boxed{V_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X_n = m)}$

6b. On cherche à appliquer le théorème de limite monotone
Montrons que la suite $((X_n = m))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante :

Si tt le monde vote A au jour n,
alors ________________ $n+1$

donc $(X_n = m) \subset (X_{n+1} = m)$ et on a bien la croissance

D'après le théorème $P(V_A) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X_n = m)\right)$

$$\boxed{P(V_A) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = m)}$$

De même, avec $V_B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X_n = 0)$, les mêmes arguments donnent :

$$\boxed{P(V_B) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0)}$$

6c. Comme en question 3 :

$$\forall n, \ \sum_{k=0}^{m} P(X_n = k) = 1 \xrightarrow{n\to+\infty} \exists \lim_{n\to+\infty} \Big(P(X_n = 0) + P(X_n = m) \Big) = 1$$

$$\Rightarrow P(V_A) + P(V_B) = 1$$

et même interprétat° :
au bout d'un temps assez long, la foule est unanime de manière presque sûre.

7a. Z_n mesure la variation du nombre d'électeurs de A d'un jour au suivant. Comme justifié plus haut, au plus un électeur change d'avis : $\boxed{Z_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}}$

7b.

~~$P(Z_n = 1) = P(X_{n+1} - X_n = \ ) \overset{\text{FPT}}{=} \sum_{k=0}^{m} P(X_n = i \cap X_{n+1} = k)$~~

~~$= \sum_{i=0}^{m} P(X_n = i) \, P_{(X_n = i)}(X_{n+1} = k)$~~

$$\boxed{P(Z_n = 1) = \sum_{i=0}^{m} \Pi_{n,i} \times \cancel{P(X_n = i)}}$$

7b.

$$P(Z_n=1) = P(X_{n+1}-X_n=1) \overset{\text{FPT}}{=} \sum_{i=0}^{m} P(X_n=i \cap X_{n+1}-X_n=1)$$

$$= \sum_{i=0}^{m} P(X_n=i \cap X_{n+1}=i+1)$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \underbrace{P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=i+1)}_{\text{nul pour } i=m \text{ et 4a sinon}} \times \Pi_{n,i}$$

$$\boxed{P(Z_n=1) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{i(m-i)}{m(m-1)} \Pi_{n,i}} \overset{\substack{\text{terme } i=0 \\ \text{nul}}}{=} \sum_{\underline{\underline{i=1}}}^{m-1} [\dots]$$

7c. De même

$$P(Z_n=-1) = \sum_{i=0}^{m} P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=i-1)\ \Pi_{n,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{i(m-i)}{m(m-1)} \Pi_{n,i}$$

terme $i=m$ nul.

$$= \sum_{i=1}^{m-1} [\dots]$$

On voit donc que $\boxed{P(Z_n=1) = P(Z_n=-1)}$

(NB : conséquence du fait que A et B jouent le même rôle ici)

7d. Alors

$$E(Z_n) = (-1)P(Z_n=-1) + 0\ P(Z_n=0) + 1.\ P(Z_n=1)$$

$$= P(Z_n=1) - P(Z_n=-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{E(Z_n)=0}$$

7e. Par linéarité de l'espérance, 7d donne :

$$\forall n\in\mathbb{N} \ , \ E(Z_n)=E(X_{n+1}-X_n)=E(X_{n+1})-E(X_n)=0$$

$$\Rightarrow \quad — \ , \ E(X_{n+1})=E(X_n)$$

donc la suite $\left(E(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante !

X_0 est certaine, égale à a donc $E(X_0)=a$

donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, E(X_N)=a}$

8. On fait tendre $n\to+\infty$ dans ce qui précède.

$$\forall n\in\mathbb{N} \ , \ 0P(X_n=0)+\underbrace{1.P(X_n=1)+\dots+(m-1)P(X_n=m-1)}_{\to 0 \text{ pour } n\to+\infty \text{ d'après 5b.}}+mP(X_n=m)=a$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} mP(X_n=m)=a$

— $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=m)=\frac{a}{m}$

— $\boxed{P(V_A)=\frac{a}{m}}$ (avec 6b)

Ainsi si dans la situat° initiale une certaine fract° de l'électorat vote pour A, la proba que tt le monde vote pour A après un tps assez long est précisément égale à cette fract° !!

Pas idiot, mais joli.

9. En transcrivant ce qu'on décrit :

```
import --
  ---.

def scrutin (m, a):
    P = np.zeros ( m )
    for k in range (a):
        P[k] = 1
```

$$P = \overbrace{[\underbrace{1, 1, ..1}_{a}, 0, --, 0]}^{m}$$

```
    while np.sum(P) > 0  and  np.sum(P) < m :        ⊛
        e1 =    rd.randint (m)          ] e1 tiré au hasard
        e2 =    rd.randint (m)          ]
        while e2 == e1:                 ] e2 tiré au hasard, et re-tiré
            e2 = rd.randint (m)         ] tant qu'il est égal à e1

        P[e2] = P[e1]        ) l'avis de e2 est écrasé par celui de e1

    if np.sum (P) == m :     ] P = [1, 1, ..., 1]  : tt le monde vote
        return 'A'                                   pour A
    else :                   ] P = [0 ... 0]
        return 'B'
```

⊛ La boucle doit tourner tant que $P \neq [1, \dots, 1]$:
et $P \neq [0, \dots, 0]$

regarder la somme des composantes de P permet cette vérificat° de manière assez simple. Si elle vaut 0 ou m on arrête
Si elle est ds $[\![1, m-1]\!]$ on continue

b. Comme d'hab :

= 10000

on fait tourner plein de fois le programme, et on regarde la fréquence de la victoire de A

```
c = 0
for k in range (10000) :
    if scrutin (10,4) == 'A' :
        c = c+1
return  c /10000
```

On trouvera bien $c \simeq 0,4$.

Problème 2.

1. $\exp(\lambda I_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda I_n)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k I_n}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right) I_n$

$\Rightarrow \boxed{\exp(\lambda I_n) = e^{\lambda} I_n}$ en reconnaissant la somme d'1 série exp.

2. $\exp(A+B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^k}{k!}$

A et B commutent donc on fait un binôme de Newton :

$$\exp(A+B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{k}{i} A^i B^{k-i}}{k!} \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{k}}_{\sum_{i \leq k}} \frac{A^i B^{k-i}}{i!(k-i)!}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=i}^{+\infty} \boxed{\frac{A^i}{i!}} \frac{B^{k-i}}{(k-i)!}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i}{i!} \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{B^{k-i}}{(k-i)!}$$ et on pose $j = k-i$ ici

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{B^j}{j!}$$

NB : l'énoncé nous dispense de tte discussion sur la convergence de ces sommes.

et on a bien $\boxed{\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)}$

3a. Par théorème de Cauchy on trouvera une unique solution.

Si la condit° initiale est $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, on voit que cette cdt° est vérifiée par la solut° nulle

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = y(t) = z(t) = 0$$ (c'est bien une solut° du système)

→ $\boxed{\text{La solut° recherchée est alors la solut° nulle}}$

3b. $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ sans difficulté

3c. M est triangulaire donc son spectre se lit sur la diagonale : $\boxed{Sp(M) = \{a\}}$

Si A étant diagonalisable on aurait $P \in M_3$ inversible tq

$$M = P(aI_3)P^{-1} = aI_3$$

On ~~b et c~~ $(b,c) \neq (0,0)$ donc ce n'est pas le cas :

$\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable}}$

3d. On résout $z' = az$ sans souci :

$$z(t) = k e^{at} \quad . \quad \text{On } z(0) = z_0 \Leftrightarrow \underline{\underline{k = z_0}}$$

$$\text{et on a } \boxed{z(t) = z_0 e^{at}}$$

3e En injectant au-dessus : y est solut° de

$$y' = ay + z_0 e^{at}$$

l'équat° homogène donne les solut° $y_h(t) = k e^{at}$

et on cherche $y_p(t) = k_1 t e^{at}$ sol. particulière.

$y_p'(t) - a y_p(t) = k_1 e^{at}$ donc y_p est solut° part. ssi $k_1 = z_0$.

Les solut° de cette équat° sont donc les

$$\underline{y(t) = k e^{at} + z_0 t e^{at} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}}$$

En demandant $y(0) = y_0$ on trouve $k = y_0$

$$\boxed{y(t) = y_0 e^{at} + z_0 t e^{at}}$$

x est alors solut° de

$$x' - ax = (y_0 + t z_0) e^{at} \quad \circledast$$

Avec la m solut° homogène, et une solut° particulière x_p tq

$$x_p(t) = (K_2 t + K_3 t^2) e^{at}$$

$$\Rightarrow x_p'(t) - a\, x_p(t) = (K_2 + 2K_3 t) e^{at}$$

x_p est solut° de $\circledast$ pour $K_2 = y_0$
et $2K_3 = z_0$

D'où $x_p(t) = (y_0 t + \frac{z_0}{2} t^2) e^{at}$

et $x(t) = K e^{at} + (y_0 t + \frac{z_0}{2} t^2) e^{at}$ et $K = x_0$ avec $x(0) = x_0$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \left(x_0 + y_0 t + z_0 \frac{t^2}{2}\right) e^{at}}$$

4a Avec cette matrice N, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où $\underline{tM = ta I_3 + tb N + tc N^2}$

4b. $N^3 = 0$ donc $\forall k \geq 3$, $N^k = N^3 N^{k-3} = 0$

la somme s'arrête donc à $k=2$!

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=0}^{n} \frac{(tbN)^k}{k!} = \underbrace{I_3}_{k=0} + \underbrace{tbN}_{k=1} + \underbrace{\frac{t^2 b^2}{2} N^2}_{k=2}$$

Pour $n \to +\infty$, l'express° est indépendante de n donc

$$\exp(tbN) = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(tbN)^k}{k!} \right) = \underline{\underline{I_3 + tbN + \frac{t^2b^2}{2} N^2}}$$

Pour N^2 ça va encore plus vite : les termes sont nuls dès que $k \geq 2$.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(tcN^2)^k}{k!} = I_3 + tcN^2 + \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{termes } k \geq 2 \text{ nuls}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\exp(tcN^2) = I_3 + tcN^2}}$$

Avec la question 2 : I_3, N, N^2 commutent donc

$$\begin{aligned}\exp(tM) &= \exp(ta I_3) \exp(tbN) \exp(tcN^2) \\ &= e^{at} I_3 \left(I_3 + tbN + \frac{t^2b^2}{2} N^2 \right)\left(I_3 + tcN^2 \right) \\ &= e^{at}\left(I_3 + tcN^2 + tbN + \cancel{t^2bcN^3} + \frac{t^2b^2}{2} N^2 + \cancel{(\dots)N^4} \right) \\ &= e^{at}\left(I_3 + tbN + \left(tc + \frac{t^2b^2}{2} \right) N^2 \right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\exp(tM) = e^{at} \begin{pmatrix} 1 & tb & tc + \frac{t^2b^2}{2} \\ 0 & 1 & tb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

En reprenant les expressions trouvées en 3e on constate bien que

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \exp(tM) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}}$$

Discrétisation

5) On reprend le système

$$\begin{cases} x'(t) = a\,x(t) + b\,y(t) + c\,z(t) \\ y'(t) = \phantom{a\,x(t) + {}} a\,y(t) + b\,z(t) \\ z'(t) = \phantom{a\,x(t) + b\,y(t) + {}} a\,z(t) \end{cases} \qquad (S)$$

On se place au point $t = kh$: on identifie alors $x(t)$ à $x(kh) = x_k$

$y(t)$ à y_k

$z(t)$ à z_k

et $x'(t)$ à $\dfrac{x(kh+h) - x(kh)}{h} = \dfrac{x_{k+1} - x_k}{h}$

et idem pour $y'(t)$ et $z'(t)$

Avec ça :

(S) se transforme en

$$\begin{cases} \dfrac{x_{k+1} - x_k}{h} = a x_k + b y_k + c z_k \\ \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h} = \phantom{a x_k + {}} a y_k + b z_k \\ \dfrac{z_{k+1} - z_k}{h} = \phantom{a x_k + b y_k + {}} a z_k \end{cases}$$

et par quelques manips sans difficultés on a ce qu'il faut.

6. Récurrence !

Au rg 0, la formule s'écrit $M^0 = a^0 I_3 = I_3$: OK.

Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, on a

$$M^{n+1} = M^n \times M = \left(a^n I_3 + n b a^{n-1} N + \left(n c a^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} b^2 a^{n-2}\right) N^2\right)$$

$$\times \left(a I_3 + b N + c N^2\right)$$

En développant et en n'écrivant pas les puissances de $N \geqslant 3$ qui sont nulles :

$$M^{n+1} = a^{n+1} I_3 + a^n b N + a^n C N^2$$

$$+ n b a^n N + n b^2 a^{n-1} N^2$$

$$+ \left(n c a^n + \frac{n(n-1)}{2} b^2 a^{n-1}\right) N^2$$

$$= a^{n+1} I_3 + \left[a^n b + n b a^n\right] N + \left[a^n c + n b^2 a^{n-1} + \overset{nca^n+}{\vee} \frac{n(n-1)}{2} b^2 a^{n-1}\right] N^2$$

$$= a^{n+1} I_3 + (n+1) a^n b N + \left((n+1) a^n c + \underbrace{\left(\frac{n(n-1)}{2} \cancel{2} + n\right)}_{= \frac{n(n+1)}{2}} b^2 a^{n-1}\right] N^2$$

d'où <u>l'hérédité et la formule</u> !

7. On prend une bonne inspiration.

$h = \frac{t}{n}$ donc $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1+\frac{at}{n} & \frac{bt}{n} & \frac{ct}{n} \\ 0 & 1+\frac{at}{n} & \frac{bt}{n} \\ 0 & 0 & 1+\frac{at}{n} \end{pmatrix}}_{\text{notée } A.} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$ d'après 5°)

Une récurrence montre que $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ [à ce stade de l'épreuve, on vous le passera comme ça !]

A est de la forme de M vue en question 3, avec

$$a \longrightarrow 1+\frac{at}{n}$$
$$b \longrightarrow \frac{bt}{n}$$
$$c \longrightarrow \frac{ct}{n}.$$

On applique alors la question 6 avec ces paramètres :

$$A^n = \left(1+\frac{at}{n}\right)^n I_3 + n.\frac{bt}{n}\left(1+\frac{at}{n}\right)^{n-1} N$$
$$+\left[n\frac{ct}{n}\left(1+\frac{at}{n}\right)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{b^2t^2}{n^2}\left(1+\frac{at}{n}\right)^{n-2}\right]N^2$$

et on vérifie que A^n est bien la matrice apparaissant dans la formule demandée.

8. Classiquement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{at}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \exp\Bigg(\underbrace{n \underbrace{\ln\left(1+\frac{at}{n}\right)}_{\sim\frac{at}{n}}}_{\to at}\Bigg) = \underline{e^{at}}$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{at}{n}\right)^{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{at}{n}\right)^n}{\underbrace{\left(1+\frac{at}{n}\right)}_{\to 1}} = \underline{e^{at}}$

et — $\left(1+\frac{at}{n}\right)^{n-2} = e^{at}$.

Enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(n-1)b^2t^2}{2n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{2n} b^2t^2 = \dfrac{b^2t^2}{2}$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \begin{pmatrix} e^{at} & bte^{at} & \left(\frac{b^2t^2}{2}+ct\right)e^{at} \\ 0 & e^{at} & bte^{at} \\ 0 & 0 & e^{at} \end{pmatrix}$

$= \exp(tM)$ de la question 4b !

Avec $x_n = x(t)$
$y_n = y(t)$
$z_n = z(t)$
on a $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

d'où pour $n\to+\infty$: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \exp(tM) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

et on retrouve bien les expressions précédentes.