DS n°3
Corrigé

Exercice 1

On considère les matrices carrées d'ordre trois : $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -3 & 4 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie I : Réduction de A

1. **Calculer** $\operatorname{Ker}(A)$**. Est-ce que A est inversible ?**

   En posant le système $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on trouve sans trop de difficulté que $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

   Ce noyau n'est pas réduit à $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ donc A n'est pas inversible.

2. **Déterminer le rang de** $A - I_3$**.**

   $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ -3 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ est de rang 2 (C_1 et C_2 égales, C_3 non colinéaire à celles-ci).

3. **Calculer** $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$**.**

   On trouve $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

4. **Déduire de ce qui précède une matrice carrée** P **d'ordre trois, inversible, dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1, telle que** $A = PDP^{-1}$ **et calculer** P^{-1}**.**

   On tire les conséquences de tout cela :

   - $0 \in \operatorname{Sp}(A)$ et $E_0(A) = \operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
   - $A - I_3$ de rang 2 donc non inversible, donc $1 \in \operatorname{Sp}(A)$.

     Il faut déterminer $E_1(A)$; la résolution de $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donnera $E_1(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.
   - $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est non nulle donc ets un vep de A pour la vap 4. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ a donc 3 valeurs propres donc tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1 (la somme des dimensions ne pouvant excéder 3) et donc $E_4(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Avec tout cela, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ on a bien $A = PDP^{-1}$ (cf. l'ordre des valeurs propres dans D) et la condition sur la première ligne de P est respectée.

Par la méthode de votre choix on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$

On se propose de résoudre l'équation

$$M^2 = A \quad (1)$$

d'inconnue M**, matrice carrée d'ordre trois.**
Soit M **une matrice carrée d'ordre trois. On note** $N = P^{-1}MP$**. (La matrice** P **a été définie en question 4).**

5. **Montrer :** $M^2 = A \Leftrightarrow N^2 = D$.

   On a
   $$M^2 = A \Leftrightarrow (PNP^{-1})^2 = A \Leftrightarrow PN^2P^{-1} = A \Leftrightarrow N^2 = P^{-1}AP = D$$
   la dernière équivalence étant obtenue en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P. Ces matrices étant inversibles, l'équivalence est bien préservée.

6. **Établir que, si** $N^2 = D$**, alors** ND = DN**.**

   Si $N^2 = D$, alors $ND = N^3$ et $DN = N^3$; d'où DN = ND.

7. **En déduire que, si** $N^2 = D$**, alors** N **est diagonale.**

   Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On trouve $ND = \begin{pmatrix} 4a & 0 & c \\ 4d & 0 & f \\ 4g & 0 & i \end{pmatrix}$ et $DN = \begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Si $N^2 = D$, alors ND = DN, ce qui donne :
   $$\begin{cases} b = d = f = h = 0 \\ c = 4c \\ 4g = g \end{cases}$$
   d'où $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ est diagonale.

8. **Déterminer toutes les matrices diagonales** N **telles que** $N^2 = D$**.**

   Si $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$, on voit que $N^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix}$.
   Alors $N^2 = D$ ssi : $a^2 = 4,\ e^2 = 0,\ i^2 = 1$; soit $a \in \{-2, 2\}, e = 0, i \in \{-1, 1\}$.

9. **En déduire la solution** B **de l'équation** (1) **dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.**

   On va donc retenir la solution $a = 2, e = 0, i = 1$.

   Si $B^2 = A$, alors $(P^{-1}BP)^2 = D$ d'après 1. ; donc $P^{-1}BP$ est diagonale d'après 3, et $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$, avec $\alpha = 2$ ou -2 et $\beta = 1$ ou -1.

Les valeurs propres de B sont alors celles de $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ (car 2 matrices semblables ont le même spectre), donc $0, \alpha, \beta$ (cette dernière matrice étant diagonale, ses vap sont ses coeff diagonaux).

Si on veut toutes les vap positives ou nulles, il faut prendre $\alpha = 2$ et $\beta = 1$: $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

et finalement $B = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Partie III : Intervention d'un polynôme

10. **Montrer qu'il existe un polynôme** Q **de degré deux, et un seul, que l'on calculera, tel que :**

$$Q(0) = 0, \ \ Q(1) = 1, \ \ Q(4) = 2.$$

La forme générale de Q est $Q(X) = aX^2 + bX + c$. Les trois conditions fournissent le système

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = 2 \end{cases}$$

On trouve $a = -\dfrac{1}{6}$ et $b = \dfrac{7}{6}$: le polynôme recherché est

$$Q(X) = -\frac{1}{6}X^2 + \frac{7}{6}X$$

11. **En déduire :** $-\dfrac{1}{6}A^2 + \dfrac{7}{6}A = B$**. (La matrice** B **a été définie en question 9).**

Il est plus judicieux d'aller chercher cette égalité d'abord dans la base de diagonalisation : on va montrer que

$$-\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or pour tout polynôme Q, $Q(D) = \begin{pmatrix} Q(4) & 0 & 0 \\ 0 & Q(0) & 0 \\ 0 & 0 & Q(1) \end{pmatrix}$; avec le Q qu'on considère ici on a bien $Q(D) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En revenant en A et B :

$$-\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -\frac{1}{6}PD^2P^{-1} + \frac{7}{6}PDP^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = B \qquad \text{(en multipliant par P à gauche, } P^{-1} \text{ à droite)}$$

12. **Montrer, pour toute matrice carrée** F **d'ordre trois :**

$$BF = FB \Leftrightarrow AF = FA.$$

Supposons BF = FB. $A = B^2$ donc $AF = B^2F = B(BF) = B(FB) = (BF)B = FBB = FB^2 = FA$.

Supposons AF = FA. Alors $BF = \left(-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A\right)F$. En utilisant AF = FA et $A^2F = FA^2$, on montre que

$$BF = \left(-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A\right)F = F\left(-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A\right) = FB$$

Partie IV : Un système différentiel

On considère le système différentiel suivant :

$$(S) \quad : \quad \begin{cases} x' = 5x - 4y + 5z \\ y' = -3x + 4y - 3z \\ z' = -4x + 4y - 4z \end{cases}$$

13. **Déterminer sans calcul, mais en justifiant, l'unique solution de ce système vérifiant** $x(0) = y(0) = z(0) = 0$**.**

    Théorème de Cauchy : cette solution existe et est unique. Or on voit que la solution nulle :

    $$\forall\, t \in \mathbb{R},\ x(t) = y(t) = z(t) = 0$$

    est une solution : c'est donc la seule.
    ()

14. **Donner l'ensemble des solutions de** (S)**. Quels points d'équilibre admet ce système ? Justifier.**

    En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ce système s'écrit $X' = AX$ où A est la matrice définie plus haut (ouf!).
    La diagonalisation de cette matrice donne alors, avec la formule de cours :

    $$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = K_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + K_3 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

    avec K_1, K_2, K_3 constantes réelles.
    Ceci peut se réécrire

    $$\begin{cases} x(t) = K_1 e^{4t} + K_2 + K_3 e^{t} \\ y(t) = -K_1 e^{4t} + K_3 e^{t} \\ z(t) = -K_1 e^{4t} - K_2 \end{cases}$$

15. **Déterminer les solutions** (x, y, z) **de ce système telles que les trois limites**

    $$\lim_{t\to+\infty} x(t) \ ; \ \lim_{t\to+\infty} y(t) \ ; \ \lim_{t\to+\infty} z(t)$$

    soient finies. Montrer alors que ces limites constituent un point d'équilibre du système.

    e^{4t} et e^{t} tendent vers $+\infty$ pour $t \to +\infty$. Pour que $\lim_{t\to+\infty} z(t)$ soit finie il faut et il suffit que K_1 soit nulle ; si K_1 est nulle $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ est finie ssi K_3 est nulle ; si K_1 et K_3 sont nulles $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ est finie.
    Ainsi les solutions sont convergentes ssi $K_1 = K_3 = 0$; dans ce cas $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_2 \\ 0 \\ -K_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A)$ est bien un point d'équilibre.

16. **Sur les figures ci-jointes, on trace des courbes représentatives de fonctions x, y, z sur l'intervalle** $[0, 0.7]$**. Identifier quels tracés *ne peuvent pas* être ceux de solutions de** (S)**. Justifier votre réponse.**

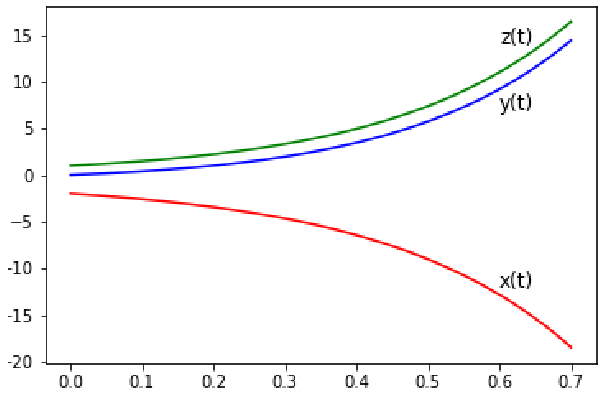

Figure 1

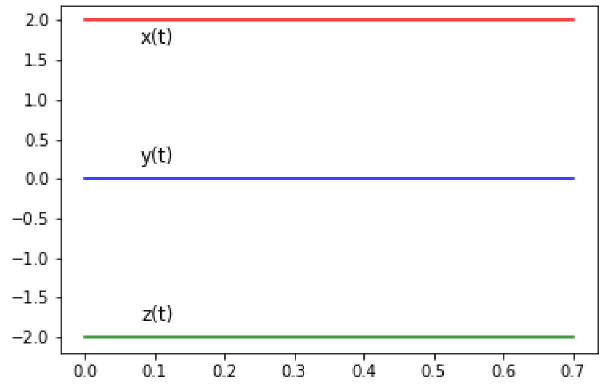

Figure 2

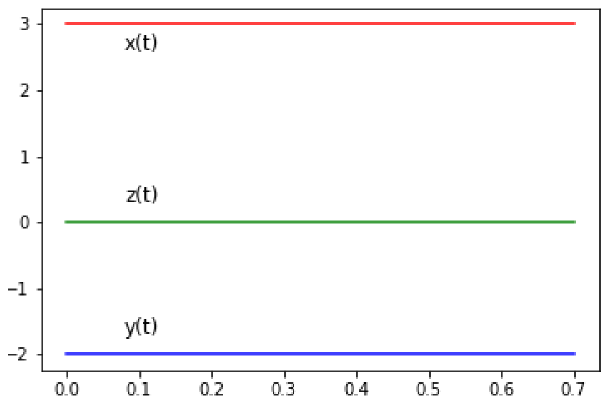

Figure 3

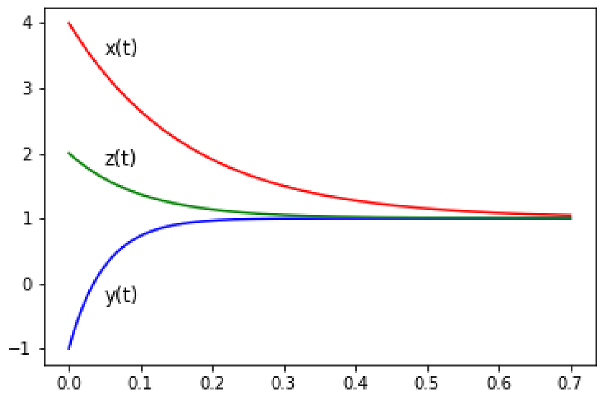

Figure 4

La figure 4 présente des solutions convergentes qui ne sont pas constantes : cela contredit la question précédente.

La figure 3 présente un point d'équilibre $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Ker}(M)$: c'est impossible.

La figure 2 présente un point d'équilibre $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ qui est bien dans $\operatorname{Ker}(M)$ donc c'est cohérent.

La figure 1 présente des solutions divergentes. Difficile de voir si les expressions sont de la forme trouvée en 14 mais ce n'est pas absurde.

Pour conclure les figures 3 et 4 ne peuvent pas convenir.

Exercice 2

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie 1 : étude de M

1. (a) **Déterminer le rang de M, puis la dimension de** $\mathrm{Ker}(M)$**.**

   On voit que C_2 et C_3 sont égales, et C_1 et C_2 non colinéaires : donc $\mathrm{rg}(M) = 2$.
   En notant $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à M : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - \mathrm{rg}(f)$ avec le théorème du rang, donc $\dim(\mathrm{Ker}(M)) = 3 - \mathrm{rg}(M) = 1$.

   (b) **Donner une base de** $\mathrm{Ker}(M)$**, puis en déduire une valeur propre de** M **ainsi que le sous-espace propre associé.**

   $M \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ équivaut à $x = 0$ et $y + z = 0$ sans trop de difficulté ; on en déduit $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Cette colonne étant non nulle elle constitue une base de $\mathrm{Ker}(M)$.
   Or $\mathrm{Ker}(M)$ est le sous-espace propre de M associé à 0 : on en déduit que $0 \in \mathrm{Sp}(M)$ et $E_0(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$;

   (c) **Calculer** $M \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **et** $M \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$**. En déduire les autres valeurs propres de** M **ainsi que les sous-espaces propres associés.**

$$M \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad M \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   On en déduit que les deux colonnes fournies sont non nulles donc sont des vecteurs propres de M : la première pour la vap $\frac{2}{3}$ et la seconde pour la vap $-\frac{2}{3}$.
   M admet donc 3 vap : $0, 2/3, -2/3$. Comme c'est une matrice de taille 3, elle ne peut pas en admettre d'autres. De plus, tous les sep sont de dimension 1 (la somme des dimensions est inférieure à 3). D'où (en notant E_λ le SEP associé à λ) :

$$E_{2/3}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad E_{-2/3}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) **Justifier sans calcul que** P **est inversible, puis déterminer la matrice** D **diagonale telle que :** $M = PDP^{-1}$**.**

   Les colonnes de P sont trois vecteurs propres associés à des vap 2 à 2 distinctes. Une telle famille est libre, donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et P est donc inversible.

La première colonne est associée à la vap $2/3$; la seconde à $-2/3$; et la troisième à 0. On a donc $M = PDP^{-1}$, avec

$$D = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) **Calculer** PQ **puis en déduire** P^{-1}**.**

On trouve $PQ = 4I_3$; d'où $P \times \left(\frac{1}{4}Q\right) = I_3$. On a donc $P^{-1} = \frac{1}{4}Q$.

(c) **Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel** j**, on a** $M^j = PD^jP^{-1}$**.**

Au rang 0 on a bien $M^0 = I_3 = PP^{-1}$; si, pour $j \in \mathbb{N}$ fixé on a $M^j = PD^jP^{-1}$ alors

$$M^{j+1} = M^j \times M = PD^jP^{-1}PDP^{-1} = PD^{j+1}P^{-1}$$

et la propriété est donc héréditaire.
On peut donc conclure : $\forall\, j \in \mathbb{N},\ M^j = PD^jP^{-1}$.

(d) **Écrire, pour tout entier naturel** j **non nul, la première colonne de la matrice** M^j**. Vérifier que ce résultat reste valable si** $j = 0$**.**

$$\begin{aligned}
M^j &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (2/3)^j & 0 & 0 \\ 0 & (-2/3)^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \times \begin{pmatrix} 2(2/3)^j & -2(-2/3)^j & 0 \\ (2/3)^j & (-2/3)^j & 0 \\ (2/3)^j & (-2/3)^j & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2(2/3)^j + 2(-2/3)^j & \star & \star \\ (2/3)^j - (-2/3)^j & \star & \star \\ (2/3)^j - (-2/3)^j & \star & \star \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(l'expression de D^j venant du fait que D est diagonale).

Pour $j = 0$ l'expression précédente donne $M^0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}$ est on retrouve bien la première colonne de I_3 : la formule est encore valable.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires.

Une urne contient trois boules numérotées de 1 **à** 3**. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.**
On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ **de la manière suivante :**

- **Pour tout entier naturel** k **non nul,** X_k **est définie *après* le** $k^{\text{ème}}$ **tirage.**
- **On procède au premier tirage et** X_1 **prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.**
- **Après le** $k^{\text{ème}}$ **tirage (**$k \in \mathbb{N}^*$**) :**
  Si X_k **a pris la valeur** 1**, dans ce cas on procède au** $(k+1)^{\text{ème}}$ **tirage et** X_{k+1} **prend la valeur du numéro obtenu à ce** $(k+1)^{\text{ème}}$ **tirage.**
  Si X_k **a pris une valeur** $j \neq 1$**, différente de** 1**, on procède également au** $(k+1)^{\text{ème}}$ **tirage ; et** X_{k+1} **prend la valeur** j **si la boule tirée porte le numéro** j **et la valeur** 1 **sinon.**

3. **Reconnaître la loi de X_1.**

   X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1,3]\!]$.

4. **Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.**

   On rappelle que `rd.randint(m,n+1)` renvoie un entier aléatoire équiréparti dans $[\![m,n]\!]$.

   Compléter la fonction suivante, qui simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie et renvoie la valeur prise la variable X_k, où k est passé en argument.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def X(k):
    X = rd.randint(1,4) # pour tirer 1,2,3 équiprobable
    for i in range(2,k+1):
        tirage = rd.randint(1,4)
        if X==1:
            X = tirage
        else:
            if tirage!=X:
                X = 1 # et sinon X est inchangé !
    return X
```

5. **On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $P(X_k = i)$.**

   (a) **Déterminer les probabilités $P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$, pour tout couple (i, j) de $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$.**

   On commence par le cas où $X_k = 1$. Alors X_{k+1} vaut le numéro de la boule tirée, ce qui montre que
$$\forall\, i \in [\![1,3]\!],\ P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = j) = \frac{1}{3}$$
   Si maintenant $X_k = 2$, alors X_{k+1} vaut 2 si on tire la boule 2, et 1 si on tire les boules 1 ou 3. D'où :
$$P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 1) = \frac{2}{3}\ ;\ P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 2) = \frac{1}{3}\ ;\ P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 3) = 0$$
   De même :
$$P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 1) = \frac{2}{3}\ ;\ P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 2) = 0\ ;\ P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 3) = \frac{1}{3}$$
   Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = AU_k$.

   D'après ce qui précède, et 3 applications des probas totales au SCE $\{(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3)\}$:
$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = 1) &= P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 1) \times P(X_k = 1) + P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 1) \times P(X_k = 2) + P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 1) \times P(X_k = 3) \\ &= \frac{1}{3} \times P(X_k = 1) + \frac{2}{3} \times P(X_k = 2) + \frac{2}{3} \times P(X_k = 3) \end{aligned}$$
   et de même
$$P(X_{k+1} = 2) = \frac{1}{3} \times P(X_k = 1) + \frac{1}{3} \times P(X_k = 2)$$
$$P(X_{k+1} = 3) = \frac{1}{3} \times P(X_k = 1) + \frac{1}{3} \times P(X_k = 3)$$

ce qui se réécrit comme un produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} P(X_{k+1}=1) \\ P(X_{k+1}=2) \\ P(X_{k+1}=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P(X_k=1) \\ P(X_k=2) \\ P(X_k=3) \end{pmatrix}$$

(b) **Montrer :** $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ U_k = A^{k-1}U_1$**. En déduire qu'en posant** $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$**, on a, pour tout** k **de** $\mathbb{N}$ **:** $U_k = A^k U_0$**.**

$U_1 = I_3 U_1$ donc la propriété est vraie au rang 1.
Si la propriété est vraie pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, alors $U_{k+1} = AU_k = A.A^{k-1}U_1 = A^k U_1$; et elle est donc héréditaire. On en déduit qu'elle est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

$U_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ car les trois boules ont même probabilité de sortie. On vérifie que $U_1 = AU_0$; et donc on a , pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_k = A^{k-1}(AU_0) = A^k U_0$. Cette propriété est encore vraie pour $k = 0$, donc finalement pour tt $k \in \mathbb{N}$.

(c) **Vérifier que** $A = M + \frac{1}{3}I$**, puis établir que, pour tout** k **de** $\mathbb{N}$**, on a :** $A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$**.**

La vérification est directe. M et $\frac{1}{3}I$ commutent, donc on peut appliquer le binôme de Newton : pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$A^k = \left(M + \frac{1}{3}I\right)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} M^j \left(\frac{1}{3}I\right)^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$$

(d) **En déduire les** 3 **éléments de la première colonne de la matrice** A^k**, puis vérifier que la loi de** X_k **est donnée par :**

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ P(X_k = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)$$

(e) **Calculer l'espérance** $E(X_k)$ **de** X_k**.**
On a par définition

$$\begin{aligned} E(X_k) &= \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) + 2 \times \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) + 3 \times \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{4} - 3 \times \frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k \end{aligned}$$

Exercice 3

1. **Soit** a **et** b **deux réels strictement positifs et** A **la matrice carrée d'ordre** 2 **définie par :** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$**.**

(a) **Montrer que si** a **et** b **sont égaux, la matrice** A **n'est pas inversible.**
Dans ce cas, les deux colonnes de A sont égales et elle est de rang $1 < 2$; donc non inversible.

(b) **Calculer la matrice $A^2 - 2aA$. En déduire que, si a et b sont distincts, la matrice A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de a, b, A, I_2.**

On trouve $A^2 - 2aA = \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & 0 \\ 0 & b^2 - a^2 \end{pmatrix}$. Si a et b sont distincts et > 0, $a^2 \neq b^2$ et $A(A - 2aI_2) = (b^2 - a^2)I_2$, donc $A^{-1} = \dfrac{1}{b^2 - a^2}(A - 2aI_2)$.

(c) **Montrer que les valeurs propres de A sont $a + b$ et $a - b$.**

$\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ ssi $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible. Avec $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & a - \lambda \end{pmatrix}$, ceci équivaut à $(a - \lambda)^2 - b^2 = 0$, ou encore à $(a - \lambda)^2 = b^2$; donc $a - \lambda = b$ ou $a - \lambda = -b$; donc $\lambda = a + b$ ou $\lambda = a - b$.

On a donc $\mathrm{Sp}(A) = \{a + b, a - b\}$.

(d) **On pose $\Delta = \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & a - b \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice Q, carrée d'ordre 2 à coefficients réels, inversible et dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, vérifiant $A = Q\Delta Q^{-1}$.**

On cherche donc les sep de A. Si $X = \binom{x}{y}$, on trouve facilement $AX = (a + b)X \Leftrightarrow x = y$ et $AX = (a - b)X \Leftrightarrow x = -y$. On peut prendre pour vep $\binom{1}{1}$ et $\binom{1}{-1}$, et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice recherchée.

2. **Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$, et $q = 1 - p$. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p.**

Pour tout ω de Ω, on désigne par $M(\omega)$ la matrice carrée d'ordre 2 : $\begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$.

On note $S(\omega)$ (respectivement $D(\omega)$) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de $M(\omega)$ et on définit ainsi deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

(a) **Montrer que la probabilité de l'événement $[X = Y]$ est donnée par: $P([X = Y]) = \dfrac{p}{2 - p}$ et en déduire la probabilité de l'événement I : « M est inversible » .**

Pour 2 variables indépendantes suivant $\mathscr{G}(p)$:

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k, Y = k) \underbrace{=}_{\text{indép}} \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2}p^2 = \frac{p^2}{q^2}\sum_{k=1}^{+\infty}(q^2)^k = \frac{p^2}{q^2}\frac{q^2}{1 - q^2}$$

(la série converge car $|q^2| < 1$). En utilisant $q^2 = (1 - p)^2$ dans le dénominateur on trouve le résultat voulu.

D'après la question **??**, $M(\omega)$ est inversible ssi $X(\omega) \neq Y(\omega)$, et donc

$$P(M(\omega) \text{ inversible}) = P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y) = \frac{2 - 2p}{2 - p}$$

(b) **Calculer la covariance des variables aléatoires S et D.**

D'après la question 1c, $S = X + Y$ et $D = X - Y$. Par bilinéarité et symétrie de la covariance :

$$\mathrm{Cov}(S, D) = \mathrm{Cov}(X + Y, X - Y) = \mathrm{Cov}(X, X) - \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(Y, X) - \mathrm{Cov}(Y, Y) = V(X) - V(Y) = 0$$

car X et Y suivent la même loi.

(c) **Calculer les probabilités** $P([S=2]\cap[D=0])$, $P([S=2])$ **et** $P([D=0])$.
Les variables aléatoires S **et** D **sont-elles indépendantes ?**

$S = X+Y$ et $D = X-Y$ On a donc $[S=2]\cap[D=0] = [X+Y=2]\cap[X=Y] = [X=1]\cap[Y=0]$ et donc par indépendance de X et Y :

$$P([S=2]\cap[D=0]) = P([X=1]\cap[Y=1]) = P([X=1])\times P([Y=1]) = p^2$$

$P(D=0) = P(X=Y) = \dfrac{p}{2-p}$ est déjà calculée.
$P(X+Y=2) = P(X=Y=1)$ car X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$: donc $P(S=2) = p^2$.

On voit que $P([S=2]\cap[D=0]) \neq P([S=2])\times P([D=0])$: S et D ne sont pas indépendantes.

(d) **Établir, pour tout entier naturel** n **supérieur ou égal à** 2 **:** $P([S=n]) = (n-1)p^2q^{n-2}$.
Pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} P(S=n) = P(X+Y=n) &\underbrace{=}_{\text{X,Y à val ds } \mathbb{N}^*} \sum_{k=1}^{n-1} P(X=k, Y=n-k) \underbrace{=}_{\text{indép}} \sum_{k=1}^{n-1} P(X=k)P(Y=n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1}pq^{n-k-1}p \\ &= p^2\sum_{k=1}^{n-1} q^{n-2} = (n-1)p^2q^{n-2} \end{aligned}$$