ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2023-2024
Mathématiques

DS n°3bis
13/01/2024
Durée : 4h

Problème 1 - Évolution des intentions de vote

Dans une élection à venir, deux candidats A et B se présentent.
Un groupe d'électeurs est composé de m individus, avec $m \geqslant 2$.
Initialement, au jour appelé « jour 0 » , le nombre d'individus préférant le candidat A vaut a (il y en a donc $m-a$ préférant le candidat B). Ensuite, chaque jour, un des individus E_1 au hasard dans le groupe en rencontre un autre, E_2, choisi au hasard également, et il lui parle des élections. Si leurs intentions de vote différent, il le convainc de voter comme lui.

Pour tout entier naturel n, on note X_n le nombre d'individus du groupe ayant l'intention de voter pour le candidat A le soir du n-iéme jour. Ainsi, X_n est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, m]\!]$.
On remarque que X_0 est une variable aléatoire certaine : $P(X_0 = a) = 1$.

Partie I - Un cas particulier : $m = 4$

Dans cette partie, on étudie le cas d'un groupe formé de quatre électeurs.

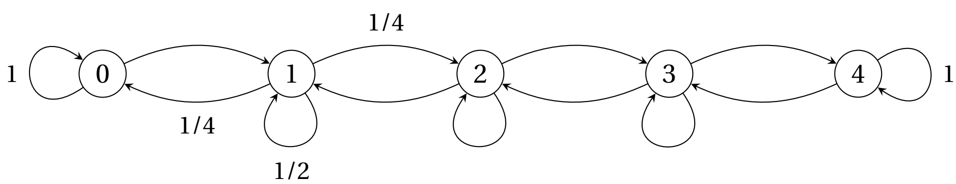
1. Soit i et j deux entiers dans $[\![0, 4]\!]$. On note $p_{i,j}$ la probabilité pour qu'il y ait exactement j personnes dans le groupe ayant l'intention de voter pour A un jour donné, sachant qu'il y en avait i la veille.

   (a) Justifier : $p_{0,0} = p_{4,4} = 1$.

   (b) Justifier : si i et j dans $[\![0, 4]\!]$ sont tels que $|i-j| \geqslant 2$, alors $p_{i,j} = 0$.

   (c) Établir : $p_{1,0} = p_{1,2} = \dfrac{1}{4}$ et $p_{1,1} = \dfrac{1}{2}$.
   On pourra poser, à un temps n fixé, les événements A_1 *: « l'individu* E_1 *vote pour le candidat A » , et* A_2 *: « l'individu* E_2 *vote pour le candidat A » .*

   (d) De la même façon, donner pour tout $(i, j) \in [\![0, 4]\!]^2$ la probabilité $p_{i,j}$.
   On présentera les résultats sur le diagramme suivant, à reproduire et à compléter, et on justifiera quelques cas.



2. On définit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n, la matrice colonne

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{2} P(X_n = 1) + \dfrac{1}{3} P(X_n = 2)$.
   Écrire, sans justification, des égalités similaires pour $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_{n+1} = 2)$, puis montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = MU_n$.

(b) En déduire pour tout entier naturel n, l'égalité $U_n = M^n U_0$.

(c) i. Montrer que M n'est pas inversible. En déduire une valeur propre de M.

ii. Montrer que $\frac{1}{2}$ est valeur propre de M.

iii. Calculer $M \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

iv. Déduire de ce qui précède l'existence d'une matrice carrée P d'ordre 3 inversible, que l'on ne demande pas de préciser, et D une matrice diagonale d'ordre 3 telles que $P^{-1}MP = D$.
On notera α, β, γ *les coefficients diagonaux de D, avec* $\alpha < \beta < \gamma$.

(d) Montrer que pour tout $k \in \{1,2,3\}$, la suite $\left(P(X_n = k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire des trois suites $\left(\alpha^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\beta^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\gamma^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(e) Montrer que pour tout $k \in \{1,2,3\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = 0$.

3. Établir : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(P(X_n = 0) + P(X_n = 4)\right) = 1$. Comment interpréter ce résultat ?

Partie II - Le cas général

On revient dans cette partie au cas général d'un groupe de m électeurs.
On note $\pi_{n,k} = P(X_n = k)$, la probabilité pour qu'il y ait exactement k électeurs envisageant de voter pour A à l'issue du n-iéme jour.

4. Soit n un entier naturel.

(a) Établir les trois relations :

$$\forall k \in [\![0, m-1]\!], \quad P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k+1) = \frac{k(m-k)}{m(m-1)} \ ;$$

$$\forall k \in [\![1, m]\!], \quad P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k-1) = \frac{k(m-k)}{m(m-1)} \ ;$$

$$\forall k \in [\![1, m-1]\!], \quad P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) = 1 - \frac{2k(m-k)}{m(m-1)} \ .$$

(b) En déduire la relation, si $k \in [\![1, m-1]\!]$:

$$\pi_{n+1,k} = \frac{(k-1)(m+1-k)\pi_{n,k-1} + [m(m-1) - 2k(m-k)]\pi_{n,k} + (k+1)(m-1-k)\pi_{n,k+1}}{m(m-1)}.$$

5. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$,

$$\pi_{n,k} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n.$$

(b) En déduire, pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$, la limite de $\pi_{n,k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On admet pour la suite les *théorèmes de limite monotone :*

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements (*ie :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$), alors

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

- Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements (*ie :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset B_n$), alors

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n)$$

6. On définit l'événement V_A (respectivement V_B) suivant : « au bout d'un certain nombre de jours, tous les individus du groupe ont l'intention de voter pour A (respectivement pour B) ».

   (a) Montrer que $V_A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X_n = m)$.

   (b) Montrer que $P(V_A) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = m)$ et $P(V_B) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0)$.

   (c) Montrer que $P(V_A) + P(V_B) = 1$.
   Que signifie ce résultat ?

7. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = X_{n+1} - X_n$.

   (a) Justifier : $Z_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$.

   (b) Exprimer $P(Z_n = 1)$ en fonction des probabilités $\pi_{n,k}$ avec $k \in [\![1, m-1]\!]$.

   (c) Comparer $P(Z_n = -1)$ et $P(Z_n = 1)$.

   (d) En déduire que $E(Z_n) = 0$.

   (e) Montrer que la suite $\big(E(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et déterminer cette constante en fonction de a.

8. Montrer que $P\big(V_A\big) = \dfrac{a}{m}$ et interpréter ce résultat.

9. Simulation Python.
   On cherche à vérifier expérimentalement le résultat de la question 8. On adopte la modélisation suivante :

   - La « population » des votants est codée par un `np.array P` à m composantes ; pour $i \in [\![0, m-1]\!]$, `P[i]` vaut 1 ssi l'électeur i vote pour le candidat A, et 0 ssi il vote pour le candidat B.
   - On tire l'électeur E_1 uniformément dans $[\![0, m-1]\!]$.
   - On tire l'électeur E_2 de la manière suivante :
     - On tire un électeur au hasard uniformément dans $[\![0, m-1]\!]$;
     - si l'électeur tiré est E_1, on en tire à nouveau un dans $[\![0, m-1]\!]$;
     - on répète cette opération jusqu'à tirer un électeur différent de E_1.

     On admet que ce protocole réalise un tirage équiprobable parmi les électeurs différents de E_1.
   - On modifie `P` pour refléter le fait que, à l'issue de leur rencontre, E_1 a convaincu E_2.

   On remarque que pour modéliser une situation initiale où a électeurs votent pour A et les $m - a$ autres votent pour B, il suffit de définir `P` comme la liste dont les a premières composantes valent 1 et les $m - a$ dernières valent 0 (il n'y a pas d'électeur ayant un rôle privilégié).

   (a) Compléter la fonction suivante, qui prend pour arguments `m` et `a` définis comme précédemment, et renvoie `'A'` si, à l'issue des diverses rencontres, toute la population vote pour le candidat A, et `'B'` sinon.
   Les calculs précédents montrent qu'une telle fonction termine presque sûrement.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def scrutin(m,a):
    # population initiale : m votants, dont a votent pour A
    ..............
    ..............
    ..............
    while np.sum(P)..... and np.sum(P)..... :
        # choix de e1 et e2
        e1 = ....
        e2 = ....
        while ... :
            e2 = ...
        # modification de P
        .......
    if ......
        return 'A'
    return 'B'
```

(b) Proposer, à l'aide de cette fonction, un moyen de vérifier expérimentalement le résultat de la question 8 pour $m = 10$ et $a = 4$. Donner les instructions Python correspondantes.

Problème 2 - Système différentiel, exponentielle de matrice, et discrétisation

Définition 1. *Soit* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de matrices de* $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. *On note* $a_{i,j}^{(n)}$ *le coefficient de* A_n *situé en* i*-ème ligne et* j*-ème colonne.*
Si $\mathrm{B}\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, *on dit que la suite* (A_n) *converge (ou tend) vers la matrice B si et seulement si on a convergence composante par composante,* ie :

$$\forall (i,j)\in [\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!],\quad \lim_{n\to+\infty} a_{i,j}^{(n)} = b_{i,j}$$

On pourra alors noter $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{A}_n = \mathrm{B}$.

Par exemple, $\lim\limits_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}1+\frac{1}{n} & \frac{1}{n^2}\\ 1 & 1-\frac{1}{n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Définition 2. *Soit* $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On appelle exponentielle de A, et on note* $\exp(\mathrm{A})$, *la matrice :*

$$\exp(\mathrm{A}) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{A}^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{A}^k}{k!}$$

(on admet que cette limite existe.)

Le but de ce problème est d'illustrer sur un exemple le rapport entre exponentielles de matrices et systèmes différentiels.

1. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrer que $\exp(\lambda \mathrm{I}_n) = e^{\lambda}\mathrm{I}_n$.

2. Soient $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, telles que $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}$. Montrer que $\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \exp(\mathrm{A})\exp(\mathrm{B})$.
Pour ce faire on admettra qu'on peut réorganiser la somme d'une série double matricielle comme on le fait pour des sommes de réels absolument convergentes.

Un raisonnement par récurrence (qu'on ne demande pas de faire ici) montre alors que si les matrices $A_1, A_2, ..., A_k$ commutent 2 à 2, alors :

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} \left(\exp(A_i)\right)$$

3. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, avec $(b, c) \neq (0, 0)$, et le système différentiel

$$(S) \quad : \quad \begin{cases} x' = ax + by + cz \\ y' = ay + bz \\ z' = az \end{cases}$$

Soient $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. On recherche les solutions de ce système telles que $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ et $z(0) = z_0$.

   (a) Combien de solutions va-t-on trouver ? Quelle(s) est-elle (sont-elles) dans le cas $x_0 = y_0 = z_0 = 0$? Justifier.

   (b) On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Montrer que (S) peut s'écrire $X' = MX$, où $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est à préciser.

   (c) Déterminer $\mathrm{Sp}(M)$. M est-elle diagonalisable ?

   (d) Donner l'expression de $z(t)$ en fonction de t.

   (e) En déduire une équation différentielle vérifiée par y. En cherchant une solution particulière de cette équation sous la forme $t \mapsto K_1 t e^{at}$, déterminer l'expression de $y(t)$ en fonction de t.
   Déduire enfin l'expression de $x(t)$; on cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto (K_2 t + K_3 t^2) e^{at}$.

4. On reprend maintenant la matrice M déterminée à la question 3b.

   (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $tM = taI_3 + tbN + tcN^2$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie facilement (ne pas le faire) que $N^3 = 0$·

   (b) Pour $n \geqslant 2$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(tbN)^k}{k!}$. En déduire la valeur de $\exp(tbN)$; obtenir de même celle de $\exp\left(tcN^2\right)$ et enfin celle de $\exp(tM)$.

   (c) Montrer que $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \exp(tM) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, où $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont les expressions des solutions de (S) trouvées dans la question 3.

Le résultat établi dans cet exercice est en fait général : pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, l'unique solution de* $X' = MX$ *telle que* $X(0) = X_0$ *est* $X : t \mapsto \exp(tM)X_0$.

Discrétisation

Dans cette dernière partie on fait le lien entre le système différentiel (S) et un système de suites récurrentes linéaires. La méthode employée est nommée *méthode d'Euler*. Soit $t > 0$; on cherche à déterminer les solutions de (S) sur $[0, t]$. Pour cela on procède de proche en proche : on considère un « pas » h (qui sera « petit »), et on approxime le nombre dérivé $x'(t)$ par le taux de variation $\dfrac{x(t+h) - x(t)}{h}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on pose $h = \dfrac{t}{n}$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$x_k = x(kh)\ ;\ y_k = y(kh)\ ;\ z_k = z(kh)$$

On remarque alors que : $x_n = x(t)\ ;\ y_n = y(t)\ ;\ z_n = z(t)$.

5. On identifie, pour $u \in [0, t]$, $x'(u)$ à $\dfrac{x(u+h) - x(u)}{h}$ (et de même pour $y'(u)$ et $z'(u)$). Montrer que, si les fonctions x, y, z sont solutions de (S) sur $[0, t]$, alors :

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\ \begin{cases} x_{k+1} = (1+ah)x_k + bhy_k + chz_k \\ y_{k+1} = (1+ah)y_k + bhz_k \\ z_{k+1} = (1+ah)z_k \end{cases}$$

6. On reprend les matrices M introduite en 3b, et N introduite en 4a. Montrer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{M}^n = a^n \mathrm{I}_3 + nba^{n-1}\mathrm{N} + \left(nca^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} b^2 a^{n-2}\right)\mathrm{N}^2$$

7. En déduire :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1+\dfrac{at}{n}\right)^n & bt\left(1+\dfrac{at}{n}\right)^{n-1} & \dfrac{n(n-1)}{2}\dfrac{b^2t^2}{n^2}\left(1+\dfrac{at}{n}\right)^{n-2} + ct\left(1+\dfrac{at}{n}\right)^{n-1} \\ 0 & \left(1+\dfrac{at}{n}\right)^n & bt\left(1+\dfrac{at}{n}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & \left(1+\dfrac{at}{n}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

8. Soit A_n la grosse matrice 3×3 apparaissant dans l'égalité précédente. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{A}_n$.
Montrer que pour $n \to +\infty$ (*ie.* quand le pas h tend vers 0), on retrouve les expressions de $x(t)$,$y(t)$,$z(t)$ déterminées dans la question 3.