ECG2B
Lycée Marcelin Berthelot

Année scolaire 2023-2024
Mathématiques

DS n°3

13/01/2024
Durée : 4h

Exercice 1

On considère les matrices carrées d'ordre trois : $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -3 & 4 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie I : Réduction de A

1. Calculer $\operatorname{Ker}(A)$. Est-ce que A est inversible ?

2. Déterminer le rang de $A - I_3$.

3. Calculer $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Déduire de ce qui précède une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1, telle que $A = PDP^{-1}$ et calculer P^{-1}.

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$

On se propose de résoudre l'équation

$$M^2 = A \quad (1)$$

d'inconnue M, matrice carrée d'ordre trois.
Soit M une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P^{-1}MP$. (La matrice P a été définie en question 4).

5. Montrer : $M^2 = A \Leftrightarrow N^2 = D$.

6. Établir que, si $N^2 = D$, alors $ND = DN$.

7. En déduire que, si $N^2 = D$, alors N est diagonale.

8. Déterminer toutes les matrices diagonales N telles que $N^2 = D$.

9. En déduire la solution B de l'équation (1) dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

Partie III : Intervention d'un polynôme

10. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré deux, et un seul, que l'on calculera, tel que :

$$Q(0) = 0, \; Q(1) = 1, \; Q(4) = 2.$$

11. En déduire : $-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = B$. (La matrice B a été définie en question 9).

12. Montrer, pour toute matrice carrée F d'ordre trois :

$$BF = FB \Leftrightarrow AF = FA.$$

Partie IV : Un système différentiel

On considère le système différentiel suivant :

$$(\mathrm{S}) \quad : \quad \begin{cases} x' = 5x - 4y + 5z \\ y' = -3x + 4y - 3z \\ z' = -4x + 4y - 4z \end{cases}$$

13. Déterminer sans calcul, mais en justifiant, l'unique solution de ce système vérifiant $x(0) = y(0) = z(0) = 0$.

14. Donner l'ensemble des solutions de (S). Quels points d'équilibre admet ce système ? Justifier.

15. Déterminer les solutions (x, y, z) de ce système telles que les trois limites

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) \quad ; \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) \quad ; \quad \lim_{t\to+\infty} z(t)$$

soient finies. Montrer alors que ces limites constituent un point d'équilibre du système.

16. Sur les figures ci-jointes, on trace des courbes représentatives de fonctions x, y, z sur l'intervalle $[0, 0.7]$. Identifier quels tracés *ne peuvent pas* être ceux de solutions de (S). Justifier votre réponse.

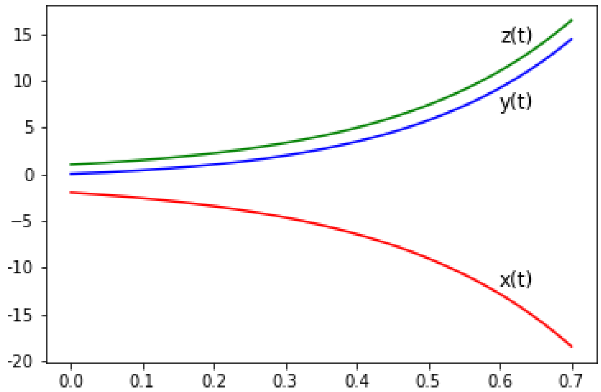

Figure 1

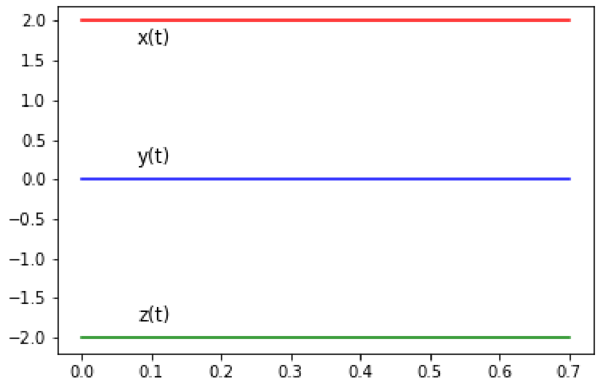

Figure 2

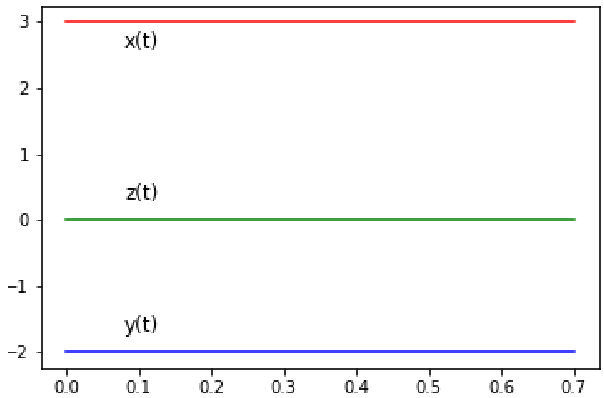

Figure 3

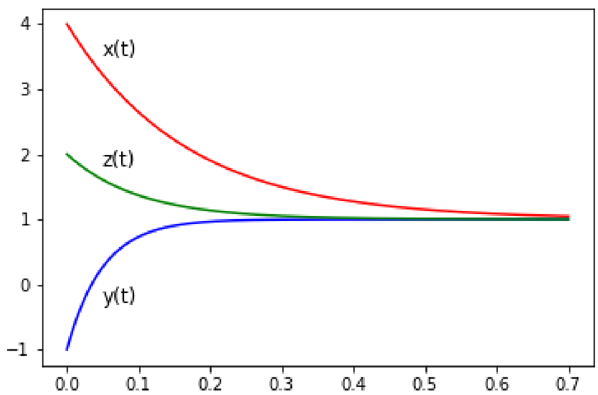

Figure 4

Exercice 2

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie 1 : étude de M

1. (a) Déterminer le rang de M, puis la dimension de Ker(M).

   (b) Donner une base de Ker(M), puis en déduire une valeur propre de M ainsi que le sous-espace propre associé.

   (c) Calculer $M \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire les autres valeurs propres de M ainsi que les sous-espaces propres associés.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier sans calcul que P est inversible, puis déterminer la matrice D diagonale telle que : $M = PDP^{-1}$.

   (b) Calculer PQ puis en déduire P^{-1}.

   (c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j, on a $M^j = PD^jP^{-1}$.

   (d) Écrire, pour tout entier naturel j non nul, la première colonne de la matrice M^j. Vérifier que ce résultat reste valable si $j = 0$.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires.

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.
On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k^{\text{ème}}$ tirage.
- On procède au premier tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le $k^{\text{ème}}$ tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :
  Si X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.
  Si X_k a pris une valeur $j \neq 1$, différente de 1, on procède également au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage ; et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

3. Reconnaître la loi de X_1.

4. **Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.**

   On rappelle que `rd.randint(m,n+1)` renvoie un entier aléatoire équiréparti dans $[\![m, n]\!]$.

Compléter la fonction suivante, qui simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie et renvoie la valeur prise la variable X_k, où k est passé en argument.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def X(k):
    X = ....
    for i in range(2,k+1):
        tirage = ...
        if X==1:
            X = ...
        else:
            if tirage!=X:
                X = ...
    return X
```

5. On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $P(X_k = i)$.

   (a) Déterminer les probabilités $P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$, pour tout couple (i, j) de $\{1,2,3\}^2$.

   (b) Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = AU_k$.

   (c) Montrer : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $U_k = A^{k-1}U_1$. En déduire qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $U_k = A^kU_0$.

   (d) Vérifier que $A = M + \frac{1}{3}I$, puis établir que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$.

   (e) En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k, puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ P(X_k = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)$$

   (f) Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k.

Exercice 3

1. Soit a et b deux réels **strictement positifs** et A la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que si a et b sont égaux, la matrice A n'est pas inversible.

   (b) Calculer la matrice $A^2 - 2aA$. En déduire que, si a et b sont distincts, la matrice A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de a, b, A, I_2.

   (c) Montrer que les valeurs propres de A sont $a + b$ et $a - b$.

   (d) On pose $\Delta = \begin{pmatrix} a+b & 0\\ 0 & a-b\end{pmatrix}$. Déterminer une matrice Q, carrée d'ordre 2 à coefficients réels, inversible et dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, vérifiant $A = Q\Delta Q^{-1}$.

2. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$, et $q = 1 - p$. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p.

Pour tout ω de Ω, on désigne par M(ω) la matrice carrée d'ordre 2 : $\begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$.

On note S(ω) (respectivement D(ω)) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de M(ω) et on définit ainsi deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

(a) Montrer que la probabilité de l'événement [X = Y] est donnée par: $P([X = Y]) = \dfrac{p}{2-p}$ et en déduire la probabilité de l'événement I : « M est inversible » .

(b) Calculer la covariance des variables aléatoires S et D.

(c) Calculer les probabilités $P([S = 2] \cap [D = 0])$, $P([S = 2])$ et $P([D = 0])$.
Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

(d) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $P([S = n]) = (n-1)p^2q^{n-2}$.