

Programme de colle n°13 Semaine du 15/01

Réduction des matrices Applications : systèmes différentiels linéaires, chaînes de Markov

Pour cette colle, ce qui tient lieu d'« exercice étoilé » est de savoir résoudre un système différentiel pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, avec n pas trop grand.

Reprise du programme de réduction des matrices.

Systèmes différentiels linéaires

- Rappels d'ECG1 : résolution, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, de $y' + ay = 0$, $y'' + ay' + by = 0$ (lorsque l'équation caractéristique a au moins une racine réelle).
- Résolution d'équations non homogènes (la recherche d'une solution particulière doit être guidée).
- Prise en compte d'une condition initiale.
- Systèmes différentiels $X' = AX$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

Résolution par diagonalisation de A , en posant $X = PY$; ou en écrivant $X(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}$ où (C_i) est une base de vecteurs propres.

- Théorème de Cauchy : existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy (cas scalaire d'ordre 1 ou d'ordre 2 ; cas vectoriel)
- Quelques aspects qualitatifs :
 - trajectoire (l'ensemble des $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$)
 - trajectoire convergente (les x_i ont une limite finie pour $t \rightarrow +\infty$)
 - point d'équilibre (ce sont les solutions constantes).

Résultats associés : pour le système (S) : $X' = AX$:

- Les points d'équilibre de (S) sont les éléments de $\text{Ker}(A)$.
- Si $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-$, toute trajectoire converge vers un point d'équilibre.
- Si $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, toute trajectoire converge vers 0.
- Si A admet une vap > 0 il existe des solutions divergentes.

Chaînes de Markov

- Rappels d'ECG1 sur les graphes : sommets, arêtes, graphes orientés, graphes pondérés.
- Matrice d'adjacence d'un graphe (orienté ou non).
- Graphe probabiliste : c'est un graphe
 - orienté et pondéré ;
 - pour tous $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$, on a au plus une arête $i \rightarrow j$;
 - pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, la somme des poids des arêtes sortant du sommet i est 1.

On notera r le nombre de sommets du graphe probabiliste considéré.

- Matrice de transition d'un graphe probabiliste.
- Définition : matrice stochastique. Une matrice est stochastique ssi c'est la matrice de transition d'un

graphe probabiliste. Si M est stochastique, $1 \in \text{Sp}(M)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(M)$.

- Chaîne de Markov associée à un graphe probabiliste de matrice de transition M : c'est une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, à valeurs dans $[[1, r]]$, telles que

$$\forall (i, j) \in [[1, r]]^2, P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = m_{i,j}$$

où $m_{i,j}$ est le coefficient (i, j) de M (c'est donc le poids de l'arête $i \rightarrow j$).

Interprétation : position au temps n d'un système sans mémoire « se déplaçant aléatoirement » sur le graphe en temps discret.

- On range la loi de X_n dans un vecteur de $\mathcal{M}_{1,r}^r$:

$$V_n = (P(X_n = 1) \quad \dots \quad P(X_n = r))$$

On a alors la relation $V_{n+1} = V_n M$. V_n est appelé *n-ième état probabiliste de la chaîne*.

- $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = V_0 M^n$.
- État probabiliste stable : c'est un état probabiliste $V = (p_1 \quad \dots \quad p_r)$ (les p_i sont donc positifs et de somme 1) tel que $VM = V$.

Un état $V = (p_1 \quad \dots \quad p_r)$ est stable ssi $\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^t M$ pour la valeur propre 1.