Programme de colle n°14

Semaine du 22/01

Chaînes de Markov - Comparaisons et DLs

Pour cette colle, ce qui tient lieu d'« exercice étoilé » est de savoir, à partir d'une situation concrète, tracer un graphe probabiliste et donner la matrice de transition associée.

Chaînes de Markov

- Rappels d'ECG1 sur les graphes : sommets, arêtes, graphes orientés, graphes pondérés.
- Matrice d'adjacence d'un graphe (orienté ou non).
- Graphe probabiliste : c'est un graphe
  - orienté et pondéré ;
  - pour tous $(i, j) \in [\![1, r]\!]^2$, on a au plus une arête $i \to j$;
  - pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, la somme des poids des arêtes sortant du sommet i est 1.

  On notera r le nombre de sommets du graphe probabiliste considéré.
- Matrice de transition d'un graphe probabiliste.
- Définition : matrice stochastique. Une matrice est stochastique ssi c'est la matrice de transition d'un graphe probabiliste.
- Chaîne de Markov associée à un graphe probabiliste de matrice de transition M : c'est une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans $[\![1, r]\!]$, telles que

  $$\forall\,(i, j) \in [\![1, r]\!]^2,\ P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = m_{i,j}$$

  où $m_{i,j}$ est le coefficient (i, j) de M (c'est donc le poids de l'arête $i \to j$).
  Interprétation : position au temps n d'un système sans mémoire « se déplaçant aléatoirement » sur le graphe en temps discret.
- On range la loi de X_n dans un vecteur de $\mathbb{R}^r$:

  $$V_n = \big(P(X_n = 1), \dots, P(X_n = r)\big)$$

  En identifiant $\mathbb{R}^r$ et $\mathscr{M}_{1,r}(\mathbb{R})$, on a alors la relation $V_{n+1} = V_n M$. V_n est appelé *n-ième état probabiliste de la chaîne.*
- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 M^n$.
- État probabiliste stable : c'est un état probabiliste $V = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_r \end{pmatrix}$ (les p_i sont donc positifs et de somme 1) tel que $VM = V$.

  Un état $\begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_r \end{pmatrix}$ est stable ssi $\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \end{pmatrix} \in E_1\left({}^tM\right)$.

Relations de comparaison

Comparaison de fonctions

- Relations o et $\sim$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ (fonctions définies sur un voisinage de a, sauf éventuellement en a), de $\pm\infty$.
- En pratique, on utilisera la caractérisation $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ pour g ne s'annulant pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a ; de même $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
- Comparaisons usuelles au voisinage de 0, de $+\infty$ (croissances comparées : exponentielles vs. puissances vs. logarithmes).
- Équivalents classiques en 0 : $\ln(1+x)$, $e^x - 1$, $(1+x)^\alpha - 1$.
  Équivalent d'une fonction polynômiale en 0, en $\pm\infty$.
  Pratique de la composition : par ex, si $f(x) \to 0$ alors $\ln(1+f(x)) \sim f(x)$.
- Application : calcul de limites.

Développements limités **(à partir de jeudi)**

Dans le cadre du programme, on se limite aux DL à l'ordre 2.

- Définition : existence d'une écriture $f(x) \underset{x\to x_0}{=} a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^2 + o\big((x-x_0)^2\big)$.
  En pratique $x_0 = 0$; si ce n'est pas le cas on posera $h = x - x_0$ pour se ramener à une variable de limite nulle.
- Cas d'une fonction dérivable en x_0 : l'existence d'un DL_1 en x_0 équivaut à la dérivabilité en x_0 ; la partie principale est l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0 ; le terme suivant, s'il existe, donne la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de x_0.
- Formule de Taylor-Young pour f $\mathscr{C}^2$ en x_0 (démo hors programme).
- DLs en 0 à connaître : $\ln(1+x)$, e^x, $(1+x)^\alpha$ (cas particuliers : $\alpha = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$).
- Addition, multiplication de DLs. Composition (DL de $f\big(\varphi(x)\big)$, avec $\varphi(x) \to 0$).
  « Gestion de la précision » : si $m \leqslant n$, $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$; un $o(x^n)$ « absorbe » tous les termes en x^k et $o(x^k)$ pour $k \geqslant n$.
  On évitera des calculs trop techniques.
- Exemples de développements asymptotiques : développement en $\pm\infty$ en puissances de $\frac{1}{x}$, ou $\frac{1}{n}$.
  Application : nature de séries numériques.
  NB : les asymptotes obliques ne sont plus au programme.