Comparaison des fonctions, développements limités
Exercices

Exercice 1. (Équivalents) (*)
Donner des équivalents simples en $x \to +\infty$, puis en $x \to 0$, des expressions suivantes :

$$x^3 - x \qquad x^4 - x^2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \qquad e^{2x} - x^5 \qquad xe^x + x^4$$

$$xe^{2x} + e^{3x} \qquad \ln(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad x\ln(x) + x^{3/2}$$

$$\frac{2}{x^5} - e^{-x} \qquad \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \qquad \ln\left(\frac{x+2}{x^3}\right)$$

Dans le dernier cas, on pourra factoriser la dernière expression dans le ln par $\frac{1}{x^2}$ *pour examiner l'un des deux équivalents.*

Exercice 2. (Calcul de développements limités et applications) (*)
Calculer les développements limités à l'ordre 2 en 0 des expressions suivantes.
Pour les fonctions f et g, déduire de ce DL l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de la fonction ; ainsi que la position relative de la courbe et de la tangente.

$$e^{2x} - 2\ln(1+x) \qquad f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+x}} \qquad g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \qquad \frac{1}{2-x} \qquad (1-x)^x$$

Exercice 3. (Calcul de développements limités, plus difficile)
Calculer les développements limités à l'ordre 2 en 0 des expressions suivantes.

$$e^{\sqrt{1+x}} \qquad \frac{1}{1+\ln(1+x)} \qquad \frac{1}{1+e^x}$$

Exercice 4. (Développements en $\pm\infty$)

1. Développer les expressions suivantes à la précision $\frac{1}{x^2}$ (*ie* les écrire sous la forme $a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$) au voisinage de $+\infty$:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}} \qquad \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

   NB : pour le second, montrer que $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

2. Déterminer a, b, c réels tels que $\sqrt{1+x^2}e^{1/x} \underset{x\to+\infty}{=} ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 5. (Calcul de limites) (*)
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+2x}-e^x}{x^4-x^3} \qquad \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(2^{1/n}-1\right) \qquad \lim_{n\to+\infty}(n+1)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)-1\right) \qquad \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2n^2}}-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

Dans le cas d'une suite de limite nulle, donner également la nature de $\sum u_n$.

Exercice 6 (Étude locale d'un prolongement). Soit f définie par $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$.

1. Donner l'ensemble de définition de f ; montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur cet ensemble.
2. Montrer que f se prolonge par continuité en 0. On notera $\tilde{f}$ ce prolongement.
3. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 à sa courbe représentative.
4. Montrer que $\tilde{f}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
5. On admet que : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$. Déterminer la position relative de la courbe de $\tilde{f}$ et de sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 7. (Étude d'une suite implicite)
Toutes les relations de comparaison dans cet exercice s'entendent pour $n\to+\infty$.

1. On reprend une suite implicite rencontrée dans la feuille d'exercices sur les suites : u_n est l'unique solution de l'équation $nx=e^{-x}$. On a donc par définition $u_n=\dfrac{e^{-u_n}}{n}$ $(*)$.

   On a vu que $u_n\sim\dfrac{1}{n}$; ceci permet d'écrire

   $$u_n=\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   On souhaite maintenant être plus précis. On note alors $u_n=\dfrac{1}{n}+v_n$, avec $v_n=o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   (a) En injectant cette égalité dans la formule $(*)$, montrer que

   $$\frac{1}{n}+v_n=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

   (b) En déduire que $v_n\sim-\dfrac{1}{n^2}$.

   Grâce aux développements limités, nous sommes donc passés de $u_n=\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ à $u_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2. **(Plus technique)** On continue : on pose maintenant $u_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}+w_n$, avec $w_n=o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   En réinjectant cette relation dans la formule $(*)$, montrer que $w_n\sim\dfrac{3}{2n^3}$.

   On peut itérer cette méthode pour obtenir un développement de plus en plus précis de u_n ; mais il faut pour cela un DL d'exp à un ordre supérieur à 2.

Solutions

2
- $e^{2x} - 2\ln(1+x) = 1 + 2x + 2x^2 - 2(x - x^2/2) + o(x^2) = 1 + 3x^2 + o(x^2)$.

- $f(x) = e^{2x}(1+x)^{-1/2} = (1 + 2x + 2x^2 + o(x^2))(1 - x/2 + 3x^2/8 + o(x^2)) = 1 + 3x/2 + 11x^2/8 + o(x^2)$.
Tangente $y = 1 + 3x/2$, position relative $\sim 11x^2/8$ donc positive, donc courbe au-dessus.

- $g(x) = (1+x^2)^{-3/2} = 1 - \dfrac{3}{2}(x^2) + o(x^2)$ (inutile d'écrire le terme en x^4 !)
Tangente $y = 1$, courbe en-dessous.

- $\dfrac{1}{2-x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x/2}\right) = \dfrac{1}{2}(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^2)) = \dfrac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

- $\exp(x\ln(1-x)) = \exp(x(-x+o(x))) = 1 - x^2 + o(x^2)$.

3
- $\exp(1 + \underbrace{x/2 - x^2/8 + o(x^2)}_{=h\to 0}) = e \times (1 + h + h^2/2 + o(h^2)) = e(1 + x/2 - x^2/8 + o(x^2) + \dfrac{1}{2}(x/2)^2) = e(1 + x/2 + o(x^2))$.
Tangente $y = e(1+x/2)$, position relative $= o(x^2)$ donc de signe inconnu : on ne peut pas conclure.

- $\dfrac{1}{1 + \underbrace{x - x^2/2 + o(x^2)}_{=h\to 0}} = 1 - (x - x^2/2 + o(x^2)) + x^2 + o(x^2) = 1 - x + 3x^2/2 + o(x^2)$
Tangente $y = 1 - x$, courbe au-dessus.

- $\dfrac{1}{2 + \underbrace{x + x^2/2 + o(x^2)}_{=h\to 0}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+h/2} = \dfrac{1}{2}(1 - h/2 + h^2/4 + o(h^2)) = \dfrac{1}{2}(1 - x/2 - x^2/4 + o(x^2) + x^2/4 + o(x^2)) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} + o(x^2)$.
Tangente $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}$, position relative : on ne peut pas conclure.

4
1. On pose $x = x_0 + h = 3 + h$. Alors

$$\ln(x) = \ln(3+h) \underset{h\to 0}{=} \ln(3) + \ln\left(1 + \frac{h}{3}\right) = \ln(3) + \frac{h}{3} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{9} + o(h^2)$$

d'où

$$\ln(x) \underset{x\to 3}{=} \ln(3) + \frac{1}{3}(x-3) - \frac{1}{18}(x-3)^2 + o\big((x-3)^2\big)$$

On trouve l'équation de la tangente avec les termes de puissance 0 et 1 du DL : $y = \ln(3) + \dfrac{1}{3}(x-3)$; et l'écart à la tangente est le reste du DL, qui équivaut à son premier terme (ie de plus basse puissance) : ici il est équivalent à $-\dfrac{1}{18}(x-3)^2 \leqslant 0$ donc la courbe est en-dessous de la tangente.

Avec $x = 1 + h$,

$$\sqrt{1+x+x^2} = \sqrt{3+3h+h^2} \underset{h\to 0}{=} \sqrt{3}\sqrt{1 + \underbrace{h + \frac{h^2}{3}}_{\to 0}} = \sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{2}\left(h + \frac{h^2}{3}\right) - \frac{1}{8}\left(h + \frac{h^2}{3}\right)^2 + o\left(\left(h + \frac{h^2}{3}\right)^2\right)\right)$$

$$= \sqrt{3}\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)\right) = \sqrt{3}\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{24} + o(h^2)\right)$$

donc $\sqrt{1+x+x^2} \underset{x\to 1}{=} \sqrt{3}\left(1 + \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{1}{24}(x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big)\right)$.
Équation de la tangente : $y = \sqrt{3}\left(1 + \dfrac{1}{2}(x-1)\right)$; écart $\sim \dfrac{\sqrt{3}}{24}(x-1)^2 \geqslant 0$ donc la courbe est au-dessus.

2.

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}} = \sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(1-\underbrace{\frac{2}{x+1}}_{\to 0}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{-2}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{4}{(x+1)^2}+o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

Ensuite :

- $-\dfrac{2}{1+x} = -\dfrac{2}{x}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{2}{x}\left(1-\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
- $\dfrac{4}{(x+1)^2} = \dfrac{4}{x^2}\dfrac{1}{(1+\frac{1}{x})^2} = \dfrac{4}{x^2}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-2} = \dfrac{4}{x^2}\left(1-\dfrac{2}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{4}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
  (NB on peut aussi voir, plus simplement, que $\dfrac{4}{(x+1)^2}\sim\dfrac{4}{x^2}$, donc $=\dfrac{4}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$)
- $o\left(\dfrac{1}{(x+1)^2}\right) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

et on conclut finalement

$$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

3.

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2}e^{1/x} &= x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\left(x+1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= x+1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

5

- $\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$.
  $x-\ln(1+x) = x-(x-x^2/2+o(x^2)) = x^2/2+o(x^2)\sim x^2/2$
  $x\underbrace{\ln(1+x)}_{\sim x}\sim x^2$.
  D'où $\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\to\dfrac{1}{2}$, donc
  $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}$$
- $\sqrt{1+2x}-e^x = 1+x-(2x)^2/8+o(x^2)-(1+x+x^2/2+o(x^2)) = -x^2+o(x^2)\sim -x^2$
  $x^4-x^3\sim -x^3$
  D'où $\dfrac{\sqrt{1+2x}-e^x}{x^4-x^3}\sim-\dfrac{1}{x}\to-\infty$.
- $\dfrac{x}{x+1}+x\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}+x\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+o(\dfrac{1}{x^2})+x(-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+o(\dfrac{1}{x^2})) = -\dfrac{3}{2x}+o(1/x)$ (attention au o !!) $\sim-\dfrac{3}{2x}\to 0$.
- $n\left(\exp(\frac{\ln(2)}{n})-1\right)\sim n\dfrac{\ln(2)}{n}\to\ln(2)$
- $(n+1)\sim n$
  $\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\ln\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)-1\right) = 1+\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{8n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})-\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2}(-1/2n)^2-1 = -\dfrac{1}{4n^2}+o(1/n^2)\sim-\dfrac{1}{4n^2}$
  Par produit l'expression proposée $\sim-\dfrac{1}{4n}$ série divergente.

- $e^{-\frac{1}{2n^2}} - n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^4} + o(1/n^4) - n^2(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} + o(1/n^4)) = o(1/n^2)$
(attention il faut pousser en $1/n^4$ car au final la multiplication par n^2 donne un $o(1/n^2)$ nécessaire à la discussion).
On ne trouve pas d'équivalent mais le $o(1/n^2)$ permet de conclure à la limite nulle et à la convergence de la série !

6 1. On voit facilement que $e^x - 1$ est du signe de x, donc le contenu du ln est positif et il suffit de voir quand il s'annule : en 0. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$; $f \mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}_f$ par composée de fonctions $\mathscr{C}^1$.

2. En O, $\frac{e^x-1}{x} \to 1$ (limite usuelle) donc $f(x) \to 0$: on peut prolonger par continuité en posant $f(0) = 0$.

3. On étudie le taux de variation en 0 : $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x}$ et il faut pousser le DL.
$e^x - 1 = x + x^2/2 + o(x^2)$ donc $f(x) = \ln(1 + x/2 + o(x)) = x/2 + o(x) \sim x/2$ et $\frac{f(x)}{x} \sim \frac{1}{2}$.
$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{2}$ donc $\widetilde{f}$ est dérivable en 0, de nombre dérive $\frac{1}{2}$.
L'équation de la tangente est la partie principale du DL tronqué à l'ordre 1 : $y = x/2$.

4. Il s'agit de montrer la continuité en 0, donc que $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = \frac{1}{2}$: ailleurs $(\widetilde{f})' = f'$ est continue.
On trouve $f'(x) = \frac{(x-1)e^x+1}{x^2}$ pour tout $x \neq 0$.
On développe :

$$(x-1)e^x + 1 = (x-1)(1+x+x^2/2+o(x^2)) = x + x^2 - 1 - x - x^2/2 + o(x^2) = x^2/2 + o(x^2) \sim x^2/2$$

de sorte que $f'(x) \sim \frac{1}{2}$ en 0 en divisant par x^2 ; donc $f'(x) \to \frac{1}{2} = f'(0)$ ce qui donne la continuité de $(\widetilde{f})'$ en 0.

5. Ce nouveau terme permet de pousser le DL de f un cran plus loin :
$e^x - 1 = x + x^2/2 + x^3/6 + o(x^3)$ donc
$f(x) = \ln(1 + x/2 + x^2/6 + o(x^2)) = x/2 + x^2/6 - \frac{1}{2}(x/2)^2 + o(x^2) = x/2 + x^2/24 + o(x^2)$ donc f est au-dessus de sa tangente.

7 1. (a) Reprenons donc $u_n = \frac{1}{n}\exp(u_n)$. Avec $u_n = \frac{1}{n} + v_n$:

$$\frac{1}{n} + v_n = \frac{1}{n}\exp\left(-\underbrace{\left(\frac{1}{n}+v_n\right)}_{\to 0}\right) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} - v_n + o\left(\frac{1}{n}+v_n\right)\right)$$

On a $v_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, ce qui implique aussi que $o\left(\frac{1}{n}+v_n\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$. On en déduit

$$\frac{1}{n} + v_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

(b) En simplifiant / développant cette dernière relation il vient

$$v_n = -\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ce qui donne bien $v_n \sim -\frac{1}{n^2}$.

2. En reprenant la relation $(*)$, en poussant le Dl plus loin et en utilisant $w_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ce qui permet d'absorber un certain nombre de termes dans les $o(...)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+w_n &= \frac{1}{n}\exp\left(-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+w_n\right)\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(1-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+w_n\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+w_n\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-w_n+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+w_n &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}-\frac{w_n}{n}+\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}
$$

Avec $w_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ on a $\frac{w_n}{n} = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et ce terme est absorbé. En simplifiant à gauche et à droite de l'égalité on obtient

$$w_n = \frac{1}{n^3}+\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{3}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

et donc $w_n \sim \frac{3}{2n^3}$.