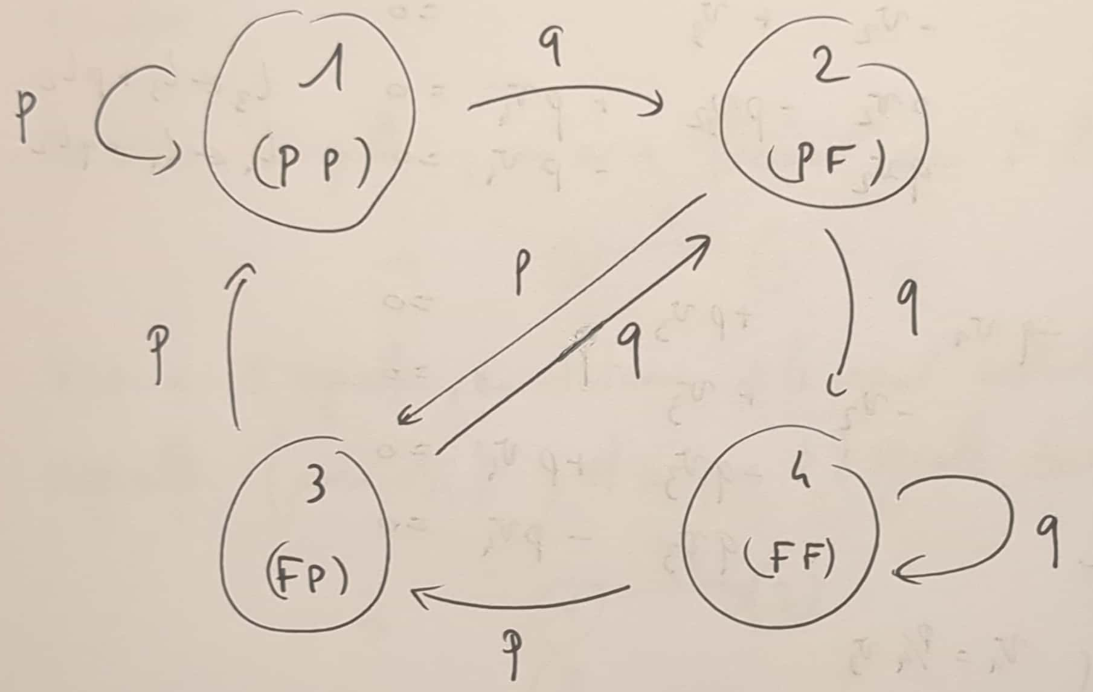
Chaînes de Markov

Exercices 2, 3.

Ex 2

Vu en cours :



[pour Pile avec proba p / Face avec proba q]

et $M = \begin{pmatrix} p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \end{pmatrix}$

Si $V = (v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4)$

$$VM = V \iff \begin{cases} p v_1 + p v_3 = v_1 \\ q v_1 + q v_3 = v_2 \\ p v_2 + p v_4 = v_3 \\ q v_2 + q v_4 = v_4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (avec $q = 1-p$, $p = 1-q$)

$$\begin{cases} -q v_1 & & +p v_3 & & = 0 \\ q v_1 & -v_2 & +q v_3 & & = 0 \\ & p v_2 & -v_3 & +p v_4 & = 0 \\ & q v_2 & & -p v_4 & = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \quad (\text{avec } p+q = 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -q v_1 & & +p v_3 & & = 0 \\ & -v_2 & + v_3 & & = 0 \\ & p v_2 & - v_3 & + p v_4 & = 0 \\ & q v_2 & & - p v_4 & = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + p L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + q L_2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -q v_1 & & +p v_3 & & = 0 \\ & -v_2 & + v_3 & & = 0 \\ & & -q v_3 & + p v_4 & = 0 \\ & & q v_3 & - p v_4 & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = p/q \, v_3 \\ v_2 = v_3 \\ v_3 = \frac{p}{q} v_4 \Leftrightarrow v_4 = \frac{q}{p} v_3 \end{cases}$$

d'où $V = \begin{pmatrix} \frac{p}{q} v_3 & v_3 & v_3 & \frac{q}{p} v_3 \end{pmatrix}$ colinéaire à $\begin{pmatrix} \frac{p}{q} & 1 & 1 & \frac{q}{p} \end{pmatrix}$

et pour obtenir l'état stable on divise par la somme des composants

$$V = \frac{1}{2 + \frac{p}{q} + \frac{q}{p}} \begin{pmatrix} \frac{p}{q} & 1 & 1 & \frac{q}{p} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{pq}{\underbrace{2pq + p^2 + q^2}_{=(p+q)^2 = 1}} \begin{pmatrix} \frac{p}{q} & 1 & 1 & \frac{q}{p} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} p^2 & pq & pq & q^2 \end{pmatrix}}}$$

[on déduit alors la réponse à la quest° 2]

Ex 3

A l'achat du $(n+1)$-ème paquet, l'évolut° de la collect° dépend de

* son état au tps n
* la nouvelle carte obtenue ;

mais pas des états $0, 1, \ldots, n-1$. On a bien une chaîne de Markov.

- Si on a 0 vignette, on en a forcément une à l'achat d'un paquet

$$\Rightarrow \quad 0 \xrightarrow{1} 1$$

- Si on a 1 vignette, on stationne si le paquet acheté contient cette vignette (proba $1/3$) ; et on passe à 2 vignettes sinon (proba $2/3$)

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "2/3"] \arrow[loop below, "1/3"] & 2 \end{tikzcd}$$

- Si on a 2 vignettes, on a la 3ème avec proba $1/3$:

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "1/3"] \arrow[loop below, "2/3"] & 3 \end{tikzcd}$$

- Si on a la collect° complète ... on ne bouge plus !

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} 3 \arrow[loop right, "1"] \end{tikzcd}$$

- Enfin, on ne peut pas revenir en arrière !

d'où le graphe

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "1"] & 1 \arrow[r, "2/3"] \arrow[loop below, "1/3"] & 2 \arrow[r, "1/3"] \arrow[loop below, "2/3"] & 3 \arrow[loop right, "1"] \end{tikzcd}$$

et la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Avec le SCE $((X_n=k))_{k\in[\![0,3]\!]}$

$$P(X_{n+1}=i) = \sum_{k=0}^{3} P_{(X_n=k)}(X_{n+1}=i) \times P(X_n=k)$$

$$\forall i\in[\![0,3]\!],\ (V_{n+1})_i = \sum_{k=0}^{3} m_{ki}(V_n)_k$$

et on reconnait la formule du produit matriciel : $V_{n+1} = V_n . M$.

3. Au début $P(X_0=0)=1$ (on n'a pas de vignette !)

d'où $\boxed{V_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)}$

4. M est triangulaire donc son spectre se lit sur la diagonale :

$$\boxed{Sp(M) = \left\{ 0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 1 \right\}}$$

On a $V\Pi = V$ (avec $V = (v_0 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3)$)

Ssi : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_1 = v_0 + \frac{1}{3} v_1 \\ v_2 = \frac{2}{3} v_1 + \frac{2}{3} v_2 \\ v_3 = \frac{1}{3} v_2 + v_3 \end{cases}$ $v_0 = 0$ puis $v_1 = 0$ $\Rightarrow v_2 = 0$

d'où $V = (0 \quad 0 \quad 0 \quad v_3)$ et pour obtenir un état :

$$\boxed{V = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)}$$ est l'unique état stable

(NB : c'est l'état où on a la collect° complète !)

5. ~~Avec des résolut°~~

Typo : il faut diagonaliser ${}^t\Pi$ (comme d'hab !)

$${}^t\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Par des résolut° de systèmes ${}^t\Pi X = \lambda X$ pour $\lambda \in Sp({}^t\Pi) = Sp(\Pi) = \{0, 1, 1/3, 2/3\}$

$$E_0({}^t\Pi) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$E_1({}^t\Pi) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$ [l'état stable !]

$$E_{1/3}({}^t\Pi) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$E_{2/3}({}^t\Pi) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

d'où ${}^tM = PDP^{-1}$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ & 1/3 & & \\ (0) & & 2/3 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Alors $({}^tM)^n = P D^n P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} & & \\ & P & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ & (1/3)^n & & \\ (0) & & (2/3)^n & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & P^{-1} & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/3)^n & 0 & 0 \\ 0 & -2(1/3)^n & (2/3)^n & 0 \\ 0 & (1/3)^n & -(2/3)^n & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ 3\times(1/3)^n & & \text{—} & \text{—} \\ -6\times(1/3)^n + 3(2/3)^n & & \text{—} & \text{—} \\ 3\times(1/3)^n - 3\times(2/3)^n + 1 & \text{—} & \text{—} & \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hphantom{3\times(1/3)^n - 3\times(2/3)^n + 1}}_{1^\circ \text{ colonne de } {}^tM^n}$ $\longrightarrow$ donne, en transposant, la 1° ligne de M^n.

5. Avec $V_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

$$V_n = V_0 M^n = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \times \begin{pmatrix} - & \cdots \\ - & \cdots \\ - & \cdots \\ - & \cdots \end{pmatrix}$$

vaut la 1ère ligne de M^n !

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$V_n = \left(0 \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad -2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{2^n}{3^{n-1}} \quad \underbrace{1 - \frac{2^n}{3^{n-1}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}_{P(X_n=3)} \right)$$

NB : $P(X_n=1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ se comprend : c'est la proba de tirer, aux paquets $2, 3, 4, \dots, n$, la vignette déjà obtenue au tps 1

$P(X_n=3)$ c'est la proba d'avoir la collect° complète au tps n.

6. avec $\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$

on voit

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{n \to +\infty} P(X_n = i) = 0 \quad \text{pour } i \in \{0, 1, 2\} \\ &\lim_{n \to +\infty} P(X_n = 3) = 1 \end{aligned}}$$

(au bout d'un tps assez long on a la collect° complète de manière presque sûre !)

7. $E(X_n) = 0.P(X_n=0) + 1.P(X_n=1) + 2.P(X_n=2) + 3.P(X_n=3)$

$$= \cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} + \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} - \cancel{4.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} + 3 - \frac{2^n}{3^{n-2}} + \cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}}$$

$$= 3 + \frac{1}{3^n}\left(3 \times 2^{n+1} - 9 \times 2^n\right) = 3 + \frac{1}{3^n}\left(-6 \times 2^n\right) = 3 - \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$$