DM6
À rendre pour le 30/01

Exercice 1

On reprend un exercice de la feuille de TD sur les séries. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.
On a vu que :

- $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$. Ainsi la série $\sum\left(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\right)$ diverge ; comme elle est à termes négatifs, ses sommes partielles tendent vers $-\infty$. On a donc, par sommation téléscopique, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\infty$; d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- De même, en posant $v_n = nu_n$, l'étude de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = +\infty$.

Ainsi u_n tend vers 0, mais moins vite que $\dfrac{1}{n}$ (car la limite précédente donne $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$).

On va utiliser un argument similaire pour donner un équivalent de u_n. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $w_n = n^\alpha u_n$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :
$$\ln\left(\frac{w_n}{w_{n-1}}\right) = -\alpha \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2n-1}{2n}\right)$$
2. Donner un développement de $\ln\left(\dfrac{w_n}{w_{n-1}}\right)$ à l'ordre $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (pour $n \to +\infty$).
3. Montrer que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{w_n}{w_{n-1}}\right)$ converge si et seulement si $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

On suppose maintenant $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

4. Pour $n \geqslant 2$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{w_k}{w_{k-1}}\right)$. En déduire que la suite $\left(\ln(w_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite finie.
5. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, u_n$ existe et est strictement positive. On la note ℓ.
6. En déduire un équivalent simple de u_n pour $n \to +\infty$; puis la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2 : Étude d'une marche aléatoire (d'après « sujet zéro » EML 2023)

On considère trois points distincts du plan A, B et C. Le but de l'exercice est d'étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant entre ces trois points.

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, à chaque étape de temps, le mobile reste immobile avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$, ou se déplace vers l'un des deux autres sommets de manière équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

- A_n l'évènement « le pion se trouve en A à l'étape n » ,
- B_n l'évènement « le pion se trouve en B à l'étape n »
- C_n l'évènement « le pion se trouve en C à l'étape n » .

Pour tout n entier naturel, on note également : $p_n = P(A_n)$, $q_n = P(B_n)$, $r_n = P(C_n)$ ainsi que $V_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix}$, le n-ème état de cette chaîne de Markov.

Partie I - Modélisation et comportement asymptotique

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste et expliquer pourquoi la matrice de transition est :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

2. (a) Déterminer p_0, q_0, r_0, p_1, q_1, r_1.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation : $V_{n+1} = V_n M$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n = V_0 M^n$.
3. La chaîne de Markov associée au graphe probabiliste de la question 1 a-t-elle un état stable ? Lequel ?
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Démontrer que : $M^n = \dfrac{1}{3\cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$, où M est la matrice introduite à la question 1.
   (b) Démontrer que $p_n = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{2}{4^n}\right)$ et déterminer alors une expression de q_n et r_n.
5. Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Interpréter ces résultats.

Partie III - Nombre moyen de passages en A et temps d'attente avant le premier passage en B

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 \text{ si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 \text{ si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}$$

   (a) Interpréter la variable aléatoire $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
   Quelle est la signification de l'espérance $E(S_n)$?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre moyen de passages en A entre l'étape 1 et l'étape n.
7. On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante : T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B, et dans le cas où le point ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$.
   Le but de cette question est de déterminer la loi de la variable aléatoire T_B ainsi que son espérance.
   (a) Calculer les probabilités $P(T_B = 1)$ et $P(T_B = 2)$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'événement $\overline{B_n}$ à l'aide des événements A_n et C_n.
   (c) Démontrer que $P(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \dfrac{1}{4} P(\overline{B_2} \cap \overline{B_1})$.
   En déduire que $P_{\overline{B_2}\cap\overline{B_1}}(B_3) = \dfrac{1}{4}$.

   Dans la suite de l'exercice, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n l'événement $\bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}$ et on admettra que : $P_{D_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.

   (d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité $P(T_B = k)$.
   En déduire la probabilité $P(T_B = 0)$.
   (e) Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?