

DM6 Indications

Exercice 1

- 1.
2. Utiliser des DLs usuels en 0 avec la variable $h = \frac{1}{n}$. On trouve :

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{n} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{8}\right) \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3. Discuter selon les valeurs de α l'équivalent de $\ln\left(\frac{w_n}{w_{n-1}}\right)$ qui se déduit du résultat précédent. Dans quel cas peut-on en conclure la convergence de la série ? et sa divergence ?
4. Série télescopique. Apprendre à reproduire le raisonnement vu en cours à leur propos, qui est à la limite du programme.
5. Commencer par la suite $(\sqrt{n} u_n)$. Ne pas oublier de discuter la stricte positivité.
6. Si une suite a_n tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}^*$, quel équivalent peut-on en donner ?

Exercice 2 : Étude d'une marche aléatoire (d'après « sujet zéro » EML 2023)

- 1.
2. (a)
(b) Cours. Savoir le refaire.
(c) Idem. Rédigez la récurrence (même rapidement).
- 3.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) NB : dans le sujet original, ceci se déduit de la diagonalisation de M , et l'utilisation de $M^n = P D^n P^{-1}$, via un certain nombre de questions intermédiaires. On a fait ça pas mal de fois... comment peut-on procéder différemment, si on nous donne l'expression à démontrer ?
 - (b)
- 5.

Partie III - Nombre moyen de passages en A et temps d'attente avant le premier passage en B

6. (a) Les X_i valent 0 ou 1 selon l'occurrence d'un certain événement ; si on somme ces valeurs on obtient le nombre d'occurrences.
(b)
(c)
7. (a) Décrire explicitement les parcours menant à $(T_B = 1)$ et $(T_B = 2)$.
(b) Si on n'est pas en B, on est où ??
(c) Ici aussi énumérer tous les scénarios menant à $(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1})$ et à $(\overline{B_2} \cap \overline{B_1})$, et constater que l'égalité recherchée est bien vraie.
(d) Exprimer $(T_B = k)$ à l'aide de certains événements B_i et $\overline{B_i}$. Calculer ensuite $P_{D_i}(\overline{B_{i+1}})$, et conclure par probas composées (on aura besoin des $P_{D_i}(\overline{B_{i+1}})$ pour tous les $i \in \{1, \dots, k-2\}$ et de $P_{D_{k-1}}(B_k)$).
(e) Regarder dans les yeux l'expression obtenue pour la loi de T_B : il n'y a plus rien à calculer.