Intégrales impropres
Exercices

Exercice 1. Montrer que les intégrales suivantes convergent, et les calculer.

1. **Indispensables : (*)**

$$\int_0^{+\infty} e^{-t/4}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \frac{2}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$$

2. **IPP et changements de variable :**

$$\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t \ \textbf{(*)} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(3x+2)^2}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}\,\mathrm{d}t \ \ (\text{poser } u=e^t) \ \textbf{(*)}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \ \ (\text{poser } u=\sqrt{t}) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}\,\mathrm{d}x \ \ (n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2)$$

Exercice 2. Discuter la convergence des intégrales suivantes :

1. **Indispensables : (*)**

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x^{5/3}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} x^n e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \ \ (\lambda>0, n\in\mathbb{N}) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\lambda x^2}\,\mathrm{d}x \ \ (\lambda>0,\ n\in\mathbb{N})$$

2. **Plus difficile :**

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \ (\text{sans la calculer !}) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\big(\ln(t)\big)^n}{t^3}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 3. Soit $n\in\mathbb{N}$; on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(t-1)^n}{t^{n+2}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I_n est convergente.
2. En posant $u=\dfrac{1}{t}$, calculer I_n.

Exercice 4. Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,\mathrm{d}u$.

1. Trouver une relation de récurrence sur les I_n (l'existence a été montrée dans l'exercice 2)
2. En déduire : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \mathrm{I}_n = n!$.

Exercice 5 (Parités)**.**
Cet exercice contient des observations qui seront très utiles lors de l'étude de variables à densité.
Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que g est paire.
Montrer que si $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent aussi.
Montrer que dans ce cas :

$$\int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$$

2. On suppose maintenant que g est impaire.
Montrer que si $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_{-\infty}^0 g(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi.
Montrer que dans ce cas : $\int_{-\infty}^0 g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.
Que vaut alors $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$?
3. Soit f une fonction paire, continue sur $\mathbb{R}$; soit $n \in \mathbb{N}$.
Discuter en fonction de n la parité de la fonction : $t \mapsto t^n f(t)$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. En déduire que :
   - si n est impair, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$;
   - si n est pair, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 6. On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 , on pose $\mathrm{I}_n = \int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que l'intégrale I_n est convergente et exprimer I_n en fonction de n.
   (b) En déduire que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
2. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.
3. (a) Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k)$.
   (b) En sommant cette dernière inégalité, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$
   (c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

Exercice 7 (Moments de la loi normale)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a montré dans l'exercice 2 que l'intégrale $\mathrm{I}_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente.
On admet dans cet exercice que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

1. Montrer que si n est impair, alors $\mathrm{I}_n = 0$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{2n} = 2\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{2n+2} = \dfrac{2n+1}{2}\mathrm{I}_{2n}$.
4. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{2n} = \sqrt{\pi}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,n!}$.

Exercice 8. Soit la fonction f définie par $f(x) = \int_1^{+\infty} \dfrac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $x \leqslant y$, donner le signe de $f(x) - f(y)$. En déduire le sens de variation de f.
3. Pour $x > 0$, calculer $f(x) + f(x+1)$. En déduire : $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$; puis les limites de f en 0 et $+\infty$.

Solutions

1 1. 4 ; 4 ; $\dfrac{1}{2}$; $\ln(2)$.

2. 1 (IPP).

$$\int_0^{A} \frac{1}{(3x+2)^2}\,dx = \int_2^{3A+2} \frac{1}{u^2}\frac{1}{3}\,du = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{u}\right]_2^{3A+2}$$

et pour $A \to +\infty$: $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(3x+2)^2}\,dx = \dfrac{1}{6}$.

$\displaystyle\int_0^{A} \frac{1}{1+e^t}\,dt = \int_1^{e^A} \frac{1}{u(1+u)}\,du \to \ln(2)$ pour $A \to +\infty$ comme vu au-dessus.

$$\int_0^{A} \frac{1}{1+e^t}\,dt = \int_1^{e^A} \frac{1}{u(1+u)}\,du$$

Avec $u = \sqrt{t}$:

$$\int_0^{A} e^{-\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{\sqrt{A}} e^{-u^2}(2u\,du) = \left[-e^{-u^2}\right]_1^{\sqrt{A}} = 1 - e^{-A} \to 1$$

d'où convergence et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt = 1$.

2 NB : je ne mentionne pas à chaque fois les continuités sur l'intervalle d'intégration, mais vous devez le faire.

- $\dfrac{1}{1+t^3} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,dt$ converge (attention à la borne $\int_1$!!!) par Riemann donc on a la cv par comparaison de fonctions positives.
- $\dfrac{(1+x)^{1/3}-1}{x^{5/3}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^{1/3}}{x^{5/3}} = \dfrac{1}{x^{4/3}}$ donc intégrale cv par comparaison à une intégrale de Riemann.
- $\dfrac{t}{e^t-1} \underset{t\to+\infty}{\sim} te^{-t}$ et $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$ cv par test de Riemann ; donc intégrale cv.
- Tests de Riemann pour les deux dernières.

Plus difficile :

- $\ln(1+t)$ croît moins vite que toute puissance de t... donc il suffit de comparer à une Riemann divergente. On peut remarquer que $\ln(1+t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t)$ d'où $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\ln(1+t)}\right)$.
  Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ diverge, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(1+t)}\,dt$ diverge.
- test de Riemann $x^2 e^{-\sqrt{x}} \to 0$ pour $x \to +\infty$
- Test de Riemann encore $t^2 \dfrac{(\ln(t))^n}{t^3} \to 0$

3 1. La fonction à intégrer est continue sur $[1,+\infty[$ comme composée de fonctions continues, avec un dénominateur ne s'annulant pas.
On a $\dfrac{(t-1)^n}{t^{n+2}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^n}{t^{n+2}} = \dfrac{1}{t^2}$; l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge (Riemann) donc par équivalence de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(t-1)^n}{t^{n+2}}\,dt$ converge.

2. Considérons $A \geqslant 1$. Le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ donne :

$$\int_1^{A} \frac{(t-1)^n}{t^{n+2}}\,dt = \int_1^{1/A} \left(\frac{1}{u}-1\right)^n u^{n+2}\left(-\frac{du}{u^2}\right) = -\int_1^{1/A} (1-u)^n\,du$$

Ici pour se faciliter la chose on peut poser $v = 1-u$:

$$-\int_1^{1/A} (1-u)^n\,du = -\int_0^{1-1/A} v^n\,(-dv) = \int_0^{1-1/A} v^n\,dv$$

Pour $A \to +\infty$ on obtient donc $I_n = \displaystyle\int_0^1 v^n\,dv = \frac{1}{n+1}$.

4

5

6

7 1. Si n est impair, $x \mapsto x^n e^{-x^2}$ est impaire donc I_n est nulle (changement de variable $t=-x$, ou voir l'exo 5).

2. Cette fois $x \mapsto x^{2n}e^{-x^2}$ est paire donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

3. Pour $\mathrm{A} \geqslant 0$ on écrit, avec une IPP :

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{A}} x^{2n+2}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\mathrm{A}} \left(x^{2n+1}\right)\left(xe^{-x^2}\right)\mathrm{d}x &= \left[x^{2n+1}(-\frac{1}{2}e^{-x^2})\right]_0^{\mathrm{A}} - \int_0^{\mathrm{A}} (2n+1)x^{2n}(-\frac{1}{2}e^{-x^2})\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{A}^{2n+1}e^{-\mathrm{A}^2} + \frac{2n+1}{2}\int_0^{\mathrm{A}} x^{2n}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Pour $\mathrm{A} \to +\infty$, le terme « non-intégral » tend vers 0 par croissances comparées, et on obtient, avec la convergence des intégrales écrites :

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+2}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2n+1}{2}\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

En multipliant par 2 on obtient bien $\mathrm{I}_{2n+2} = \dfrac{2n+1}{2}\mathrm{I}_{2n}$.

4. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- $\mathrm{I}_0 = \sqrt{\pi}\dfrac{0!}{2^0\,0!} = \sqrt{\pi}$ est donnée par l'énoncé ;
- si $\mathrm{I}_{2n} = \sqrt{\pi}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,n!}$ alors

$$\mathrm{I}_{2n+2} = \frac{2n+1}{2}\mathrm{I}_{2n} = \frac{2n+1}{2}\sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!} = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!(2n+1)}{2^{2n+1}n!} = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{2^{2n+2}n!(n+1)} = \sqrt{\pi}\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!}$$

et on a bien l'hérédité ; et on peut conclure.

8 1. La fonction à intégrer est continue sur $[1,+\infty[$; en $+\infty$ on a $\dfrac{t^x}{1+t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{x+1}}\,\mathrm{d}t$ converge ssi $x+1>1$; donc par équivalence de fonctions positives, $f(x)$ existe ssi $x>0$. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

2. $t^{-x} = e^{-x\ln(t)}$.
Pour comparer $f(x)$ et $f(y)$ on compare les fonctions à intégrer sur l'intervalle d'intégration.
Soit donc $t \in [1,+\infty[$: on a $\ln(t) \geqslant 0$. Alors

$$x \leqslant y \Rightarrow -x \geqslant -y \Rightarrow -x\ln(t) \geqslant -y\ln(t) \Rightarrow e^{-x\ln(t)} \geqslant e^{-y\ln(t)}$$

par croissance de l'exponentielle ; donc $t^{-x} \geqslant t^{-y}$ et en divisant par $(1+t)>0$:

$$\forall\, t \geqslant 1,\ \frac{t^{-x}}{1+t} \geqslant \frac{t^{-y}}{1+t}$$

En intégrant cette dernière égalité sur $[1,+\infty[$ on trouve $f(x) \geqslant f(y)$. $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$: f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.

$$\begin{aligned}f(x)+f(x+1) &= \int_1^{+\infty}\frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty}\frac{t^{-x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{+\infty}\frac{t^{-x}+t^{-x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{+\infty} t^{-x-1}\frac{t+1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{+\infty} t^{-x-1}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Une primitive de t^{-x-1} est $\dfrac{t^{-x}}{-x}$ (avec $x \neq 0$) ; en introduisant $\mathrm{A} \geqslant 1$ et en prenant une limite $\mathrm{A} \to +\infty$ il vient

$$f(x) + f(x+1) = \int_1^{+\infty} t^{-x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

La fonction intégrée est positive donc on a $f(x) \geqslant 0$ pour tout x ; donc

$$f(x) \leqslant f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$$

De puis par décroissance on a $f(x+1) \leqslant f(x)$ donc $f(x) + f(x+1) \leqslant 2f(x)$ soit $\dfrac{1}{x} \leqslant 2f(x)$ ou encore

$$f(x) \geqslant \frac{1}{2x}$$

Finalement : $\forall\, x > 0,\ \dfrac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$. Pour $x \to +\infty$ on a directement par théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

et pour $x \to 0^+$, $\dfrac{1}{2x} \leqslant f(x)$ et $\dfrac{1}{2x} \to +\infty$ donne

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$