Révisions d'intégration

Corrigé

Ex 2 $\int_1^2 t\ln(t)\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{t}\,dt$

$u(t) = t \rightarrow U(t) = \frac{t^2}{2}$

$v(t) = \ln(t) \rightarrow v'(t) = \frac{1}{t}$

$= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\int_1^2 t\,dt$

$= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2$

$$\boxed{\int_1^2 t\ln(t)\,dt = 2\ln(2) - \frac{3}{4}}$$

$\int_0^1 x^2 e^x\,dx$: 2 IPP en dérivant la puissance et en intégrant l'exp.

$\int_0^1 x^2 e^x\,dx = \left[x^2 e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x e^x\,dx$

$= e - 2\int_0^1 x e^x\,dx$

$= e - 2\left(\left[x e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx\right)$

$= e - 2\left(e - \left[e^x\right]_0^1\right)$

$= e - 2\left(e - (e-1)\right)$

$$\boxed{\int_0^1 x^2 e^x\,dx = e - 2}$$

Exercice 6

$$\int_0^1 \frac{x^2+3x+1}{x+1}\,dx.$$

Avec c, d, e réels, on a $cx+d+\frac{e}{x+1} = \frac{(cx+d)(x+1)+e}{x+1}$

$$= \frac{cx^2+(c+d)x+d+e}{x+1}.$$

Cette dernière expression vaut $\frac{x^2+3x+1}{x+1}$ pour $\boxed{\begin{array}{l} c=1 \\ d=2 \\ e=-1 \end{array}}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^2+3x+1}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(x+2-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}+2x-\ln|x+1|\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{5}{2}-\ln(2)\right)-0$$

$$= \boxed{\frac{5}{2}-\ln(2)}$$

$\int_0^1 \frac{x+3}{x^2-x-2}\,dx$: ... compliqué ! il y a peut-être une erreur d'énoncé...

On commence par factoriser en bas : $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$ [en trouvant les racines]

Puis, à la manière de l'exo 1, on montre que

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right).$$

(2)

d'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{x^2-x-2}\,dx$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x+3}{x-2}\,dx - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x+3}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x-2+5}{x-2}\,dx - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x+1+2}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(1+\frac{5}{x-2}\right)dx - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(1+\frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left[x+5\ln|x-2|\right]_0^1 - \left[x+2\ln|x+1|\right]_0^1 \right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1-5\ln(2) - (1+2\ln(2))\right)$$

$$= \underline{\underline{-\frac{7}{3}\ln(2)}}$$

ouf !

$$\cdot \int_1^2 5^x\,dx = \int_1^2 \exp(x\ln(5))\,dx = \left[\frac{1}{\ln(5)}\exp(x\ln(5))\right]_1^2$$

$$= \frac{e^{2\ln(5)} - e^{\ln(5)}}{\ln(5)}$$

$$= \frac{25-5}{\ln(5)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_1^2 5^x\,dx = \frac{20}{\ln(5)}}$$

$\int_0^5 |x^2-5x+6|\,dx$: il faut déterminer le signe du contenu de la valeur absolue

Un Δ donne les racines de X^2-5X+6 : $\underline{\underline{2 \text{ et } 3}}$

d'où $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$

et on a rapidement le tableau suivant

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

d'où $|x^2-5x+6| = x^2-5x+6$ si $x \leq 2$ ou $x \geq 3$

$= -x^2+5x-6$ si $x \in [2,3]$

On découpe alors l'intégrale par relation de Chasles :

$$\int_0^5 |x^2-5x+6|\,dx = \int_0^2 |x^2-5x+6|\,dx + \int_2^3 |x^2-5x+6|\,dx + \int_3^5 |x^2-5x+6|\,dx$$

$$= \int_0^2 (x^2-5x+6)\,dx + \int_2^3 (-x^2+5x-6)\,dx + \int_3^5 (x^2-5x+6)\,dx$$

$$= \dots = \frac{14}{3} + \frac{1}{6} + \frac{14}{3} = \frac{57}{6}.$$

$$\int_1^2 (x-1)\, e^{x^2-2x+1}\, dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (2x-2)\, e^{x^2-2x+1}$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{x^2-2x+1} \right]_1^2 \quad \text{en reconnaissant une forme } u'e^u$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}(e-1)}}$$

Exercice 8

$$\int_1^2 \frac{1}{t+2\sqrt{t}}\, dt \quad : \quad u = \sqrt{t} \iff t = u^2 \text{ et } dt = 2u\,du$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u^2+2u} (2u\,du) = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u+2}\, du$$

$$= 2 \left[\ln|u+2| \right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \underline{\underline{2\left(\ln(\sqrt{2}+2) - \ln(3) \right)}}$$

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{u\ln(u)}\, du \underset{\substack{t = \ln(u) \\ u = e^t \\ du = e^t dt}}{=} \int_1^2 \frac{1}{t\cancel{e^t}} \cancel{e^t} dt = \left[\ln(t) \right]_1^2 = \underline{\underline{\ln(2)}}$$

(NB : on peut reconnaître 1 forme $\frac{f'(u)}{f(u)}$ car $\frac{1}{u\ln(u)} = \frac{1/u}{\ln(u)}$)

Exercice 9

1) $g : t \mapsto \sqrt{1+t^4}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ $(1+t^4 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\,dt \text{ existe pour tt réel } x$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1+t^4} \geq 0$.

On intègre ceci sur $[x, 2x]$ ... mais attention à l'ordre des bornes !!

* si $x \geq 0$, $x \leq 2x$ et donc :

$$\forall t \in [x, 2x], \quad \sqrt{1+t^4} \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\,dt \geq 0 \qquad : \boxed{\forall x \geq 0, \; f(x) \geq 0}$$

* si $x \leq 0$, $2x \leq x$:

$$\forall t \in [2x, x], \quad \sqrt{1+t^4} \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\,dt \leq 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\forall x \leq 0, \; f(x) \leq 0}$$

2) On effectue le changement de variable $u = -t$.

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \sqrt{1+t^4}\,dt = \int_x^{2x} \sqrt{1+u^4}\,(-du)$$

$$= -\int_x^{2x} \sqrt{1+u^4}\,du = -f(x)$$

De plus f est définie sur $\mathbb{R}$ symétrique /à 0 : f est bien impaire sur $\mathbb{R}$.

3. Sur $[x, 2x]$: avec $x \geq 0$

$$t \geq x \Rightarrow t^4 \geq x^4 \quad (t \mapsto t^4 \nearrow \text{ sur } \underline{\underline{\mathbb{R}_+}})$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+t^4} \geq \sqrt{1+x^4}.$$

On intègre sur $[x, 2x]$, $\underline{\underline{\text{avec } 2x \geq x}}$ car $x \geq 0$

$$\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\, dt \geq \int_x^{2x} \sqrt{1+x^4}\, dt$$

$$f(x) \geq \sqrt{1+x^4} \int_x^{2x} 1 . dt$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) \geq x\sqrt{1+x^4}}$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{1+x^4}$ il vient par minoration $\underline{\underline{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}}$

f étant impaire, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \cancel{\lim\limits_{y \to +\infty}} = \lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = - \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \underline{\underline{= -\infty}}$

4. En passant au carré, l'encadrement demandé équivaut à

$$t^4 \leq 1 + t^4 \leq (1+t^2)^2 = 1 + 2t^2 + t^4.$$

Faisons donc les choses dans le bon sens :

$$\forall t \geq 0, \quad t^4 \leq 1 + t^4 \leq 1 + \underbrace{2t^2}_{\geq 0} + t^4$$

$\sqrt{\ }$ croissante

$$\Rightarrow \quad t^2 \leq \sqrt{1+t^4} \leq \sqrt{(1+t^2)^2} = 1 + t^2$$

On intègre alors sur $[x, 2x]$, avec $x \geq 0$:

$$\forall t \in [x, 2x] \quad , \quad t^2 \leq \sqrt{1+t^4} \leq t^2+1$$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} t^2 dt \leq \int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\, dt \leq \int_x^{2x} (t^2+1)\, dt$$

$$\Rightarrow \left[\frac{t^3}{3}\right]_x^{2x} \leq f(x) \leq \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{7x^3}{3} \leq f(x) \leq \frac{7x^3}{3} + x$$

En $+\infty$, le terme $\frac{7x^3}{3}$ domine : on va montrer que $f(x) \sim \frac{7x^3}{3}$ par quotient.

$$\forall x > 0 : \quad 1 \leq \frac{f(x)}{7x^3/3} \leq 1 + \frac{x}{\frac{7x^3}{3}}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{f(x)}{\frac{7x^3}{3}} \leq \underbrace{1 + \frac{3}{7x^2}}_{\xrightarrow{x \to +\infty} 1}$$

donc par théorème des gendarmes :

$$\cancel{\lim_{x \to +\infty}} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{7x^3}{3}} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{7x^3}{3}}$$

6. En intégrant $\sqrt{1+t^4} \geq 1$ sur $[x, 2x]$ on obtient $\underline{f(x) \geq x}$

d'où $\forall x \geq 0 \qquad x \leq f(x) \leq \frac{7x^3}{3} + x$

et on montre que $\boxed{f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} x}$: $\forall x > 0$, $1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \overbrace{1 + \frac{7x^2}{3}}^{\to 1}$ et on conclut par gendarmes

(NB : on peut dès lors utiliser l'imparité pour trouver des équivalents en 0^- et $-\infty$:

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{7x^3}{6} \Rightarrow \text{Pour } x\to-\infty \quad f(x) = -f(\underbrace{-x}_{\to+\infty})$$

$$\sim -\frac{7(-x)^3}{6}$$

~~donc~~ ~~ff~~

$$\Rightarrow f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} +\frac{7x^3}{6}$$

et de m̂ : $f(x) \underset{x\to0^-}{\sim} x$

Exercice 10

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \, dx$$

1. Le "n!" va faire l'affaire... on peut brutalement majorer e^x par e^1 et $(1-x)^n$ par 1.

La fct° à intégrer est clairement positive.

$\forall x \in [0,1]$ $\qquad 0 \leq \frac{(1-x)^n e^x}{n!} \leq \frac{e}{n!}$

d'où en intégrant sur $[0,1]$: $\underline{0} \leq I_n \leq \int_0^1 \frac{e}{n!} dx = \underbrace{\frac{e}{n!}}_{\xrightarrow{n\infty} 0}$

Par th. des gendarmes, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

2. On veut passer d'un intégrande en $(1-x)^n \dots$ à $(1-x)^{n+1} \dots$ $\Rightarrow$ IPP !

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x \, dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x \\ v(x) = (1-x)^n \Rightarrow V(x) = -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \end{array}\right\} \text{fct}^\circ\ \mathcal{C}^1$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{n!}\left(\left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}e^x\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}e^x \, dx\right)$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\cancel{1} - \frac{1}{n+1}\left[(1-x)^{n+1}e^x\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^x \, dx\right)$$

$$= \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{n+1}(-1) + \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^x \, dx\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^x \, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}}$$

3. On va utiliser $\dfrac{1}{k!} = I_{k-1} - I_k$ (⚠ $\forall k \in \mathbb{N}^*$)

Sommer pour télescoper les I_k, et espérer que ça marche

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{n}\left(I_{k-1} - I_k\right) = I_0 - I_n \quad ; \text{ avec } I_0 = \int_0^1 e^x \, dx = e-1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = e - 1 - I_n$$

Pour $n \to +\infty$, $I_n \to 0$

donc on obtient la convergence de $\sum \frac{1}{k!}$

et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - 1$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \underline{\underline{e}}.$$

terme $k=0$