Programme de colle n°16
Semaine du 5/02

Intégrales impropres
Variables aléatoires à densité (début)

Pour cette semaine, tous les exercices étoilés de la feuille TD10.2 sur les intégrales impropres sont exigibles.

Intégrale sur un segment d'une fonction continue

Reprise du programme précédent.

Intégrales impropres

Attention : seules les bornes impropres $\pm\infty$ sont au programme.

On se place dans le cas d'une fonction continue sur $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.

- Définition : soit f continue sur $[a, +\infty[$; on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente ssi $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Définition similaire pour $\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ssi $\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent (où $a \in \mathbb{R}$ est quelconque).
- **NB :** la notion d'intégrabilité n'est pas au programme.
- Convergence / divergence d'intégrales par calcul de $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$; valeur de l'intégrale dans le cas convergent.
  NB : pour calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, on effectue donc deux calculs de limite séparés.
- **Attention :** dans le cas d'une intégrale impropre, les techniques usuelles (IPP, changement de variable) doivent être effectués sur des intégrales **sur un segment** ; on passe ensuite à la limite.
  Le programme tolère seulement un changement de variable affine effectué directement sur les intégrales impropres.
- Convergence absolue d'une intégrale. Elle implique la convergence.
- **Outils de comparaison**
  Tous ces outils sont valables pour des fonctions *positives* au voisinage de $+\infty$. Les théorèmes sont similaires pour des intégrales de la forme $\int_{-\infty}^a$.
  - Si $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ; et $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. Extension au cas où l'inégalité a lieu sur $[c, +\infty[$, avec $c \geqslant a$.
  - Si f et g sont positives et $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\big(g(t)\big)$, alors $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

- Si f et g sont positives et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Dans le cas non positif on peut discuter la convergence de $\int_a^{+\infty} (-f(t))\,\mathrm{d}t$, ou utiliser une convergence absolue.

- **Intégrales de référence**
  - Intégrales de Riemann : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ convergent ssi $\alpha > 1$.
  - Intégrales de $t \mapsto e^{\lambda t}$ en $\pm\infty$.
  - « Test de Riemann » pour la convergence de certaines intégrales impropres par $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ ($\alpha > 1$). Le raisonnement doit être détaillé.

À partir de jeudi : Variables à densité

- Fonction de répartition ; ses propriétés : croissance, limites en $\pm\infty$, continuité à droite en tout point. $\forall\, a < b \in \mathbb{R}^2$, $P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$.
  Pour tout réel x :
  - $P(X < x) = \lim\limits_{t\to x^-} F_X(t)$
  - $P(X = x) = F_X(x) - \lim\limits_{t\to x^-} F_X(t)$
  - si F_X est continue en x, on a $P(X = x) = 0$.
- La fonction de répartition d'une variable certaine $X = a$ doit être connue.
- Réciproquement, toute fonction F croissante, tendant vers 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, et continue à droite en tout point, est la fonction de répartition d'une certaine variable X.
- Une variable X est à densité ssi F_X est continue, et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points. Dans ce cas, toute fonction f telle que $F'_X = f$ (sauf en un nombre fini de points) est appelée densité de f.
  NB : une variable à densité admet donc plusieurs densités ; notamment, en les points où F_X n'est pas dérivable, on peut donner une valeur arbitraire à f.
- Réciproquement, on appelle *densité* toute fonction f positive, continue sauf en un nombre fini de points, et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Il existe alors une variable de densité f.
- Si X est une variable de densité f, on a : pour tout réel x, $P(X = x) = 0$.
  Expression des quantités $P(X \leqslant x)$, $P(X \geqslant x)$, $P(a < X \leqslant b)$ en fonction d'intégrales de f.
  Ces dernières probabilités sont inchangées si on remplace les inégalités strictes par des inégalités larges.
- **Lois usuelles :**
  Expressions d'une densité et de la fonction de répartition pour :
  - $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a, b])$.
  - $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.
  - $X \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ (et en particulier : $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0, 1)$).
- Une variable à densité f admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge *absolument* ; on a alors $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$.
  Généralisation : moments d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$.
  Les étudiants doivent savoir repérer le cas d'une densité paire ; en cas d'existence de l'espérance, cette dernière est alors nulle (à justifier par un changement de variable).
- Une variable à densité f admet une variance ssi elle admet un moment d'ordre 2. Elle admet alors une espérance, et on a : $V(X) = E\big((X - E(X))^2\big) = E(X^2) - E(X)^2$.
- Espérances et variances des lois usuelles.
- Théorème de transfert : soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sauf en un nombre fini de points ; la variable $g(X)$ admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument.
  Si la densité f est nulle hors de $[a, b]$ on peut directement se ramener à $E(g(X)) = \int_a^b g(x) f(x)\,\mathrm{d}x$.