DM6
Corrigé

Exercice 1

On reprend un exercice de la feuille de TD sur les séries. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.
On a vu que :

- $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$**. Ainsi la série $\sum\left(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\right)$ diverge ; comme elle est à termes négatifs, ses sommes partielles tendent vers $-\infty$. On a donc, par sommation téléscopique, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\infty$; d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.**

- **De même, en posant $v_n = n u_n$, l'étude de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = +\infty$.**

Ainsi u_n tend vers 0, mais moins vite que $\dfrac{1}{n}$ (car la limite précédente donne $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$).

On va utiliser un argument similaire pour donner un équivalent de u_n. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $w_n = n^\alpha u_n$.

1. **Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :**
$$\ln\left(\frac{w_n}{w_{n-1}}\right) = -\alpha \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2n-1}{2n}\right)$$
Pour $n \geqslant 2$: $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \dfrac{2^{2n-2}(n-1)!^2}{(2n-2)!} = \dfrac{2n(2n-1)}{4n^2} = \dfrac{2n-1}{2n}$.
Alors $\dfrac{w_n}{w_{n-1}} = \dfrac{n^\alpha u_n}{(n-1)^\alpha u_{n-1}} = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^\alpha \dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{-\alpha} \dfrac{2n-1}{2n}$.
Donc $\ln\left(\dfrac{w_n}{w_{n-1}}\right) = -\alpha \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)$.

2. **Donner un développement de $\ln\left(\dfrac{w_n}{w_{n-1}}\right)$ à l'ordre $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (pour $n \to +\infty$).**

Pour $n \to +\infty$, on a : $-\alpha \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = -\alpha\left(-\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\alpha}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$;
et :
$$\ln\left(\frac{2n-1}{2n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
En additionnant :
$$\ln\left(\frac{w_n}{w_{n-1}}\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha}{2n^2} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{8}\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3. **Montrer que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{w_n}{w_{n-1}}\right)$ converge si et seulement si $\alpha = \dfrac{1}{2}$.**

Si $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\ln\left(\dfrac{w_n}{w_{n-1}}\right) = \dfrac{1}{4n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \sim \dfrac{1}{4n^2}$ pour $n \to +\infty$.
Par comparaison de SATP, la série de terme général $\ln\left(\dfrac{w_n}{w_{n-1}}\right)$ converge.
Par contre si $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$, le terme en $\dfrac{1}{n}$ ne disparaît pas : on trouve
$$\ln\left(\frac{w_n}{w_{n-1}}\right) \sim \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}$$
et on a cette fois une série divergente par comparaison avec la série $\sum \frac{1}{n}$ (quitte à passer par la comparaison des opposés si $\alpha - \dfrac{1}{2} < 0$).

On suppose maintenant $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

4. **Pour $n \geqslant 2$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{w_k}{w_{k-1}}\right)$. En déduire que la suite $\left(\ln(w_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite finie.**

   Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on a $w_n = n^{\alpha} u_n = \sqrt{n} u_n$.
   On reconnaît une série téléscopique : en sommant de $n = 2$ à N,
   $$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{w_k}{w_{k-1}}\right) = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(w_k) - \ln(w_{k-1})\right) = \ln(w_n) - \ln(w_1) = \ln(w_n) - \ln(\sqrt{1}u_1) = \ln(w_n)$$
   On vient de voir que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{w_k}{w_{k-1}}\right)$ converge ; ce qui équivaut à la convergence de la suite des sommes partielles vers une limite réelle S :
   $$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{w_k}{w_{k-1}}\right)\right) = \mathrm{S}$$
   donc
   $$\lim_{n\to+\infty} \ln(w_n) = \mathrm{S}$$

5. **En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, u_n$ existe et est strictement positive. On la note ℓ.**

   En passant à l'exponentielle on en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = \exp(\mathrm{S})$.En notant $\ell = e^{\mathrm{S}} > 0$ (c'est une exponentielle !) on a bien
   $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, u_n = \ell$$

6. **En déduire un équivalent simple de u_n pour $n \to +\infty$; puis la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la nature de la série de terme général u_n.**

   Comme $\ell \neq 0$ on peut écrire
   $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, u_n = \ell \;\Rightarrow \sqrt{n} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell \;\Rightarrow\; u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{\sqrt{n}}$$
   De $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ell}{\sqrt{n}} = 0$ on conclut que (u_n) tend vers 0 ; et comme $\sum \dfrac{\ell}{\sqrt{n}}$ diverge (Riemann avec $\alpha = \dfrac{1}{2} \leqslant 1$), on a par comparaison de séries à termes positifs : $\sum u_n$ diverge.

Exercice 2 : Étude d'une marche aléatoire (d'après « sujet zéro » EML 2023)

On considère trois points distincts du plan A, B **et** C. **Le but de l'exercice est d'étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant entre ces trois points.**

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. **Ensuite, à chaque étape de temps, le mobile reste immobile avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$, ou se déplace vers l'un des deux autres sommets de manière équiprobable.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

- A_n **l'évènement « le pion se trouve en** A **à l'étape** n **» ,**
- B_n **l'évènement « le pion se trouve en** B **à l'étape** n **»**
- C_n **l'évènement « le pion se trouve en** C **à l'étape** n **» .**

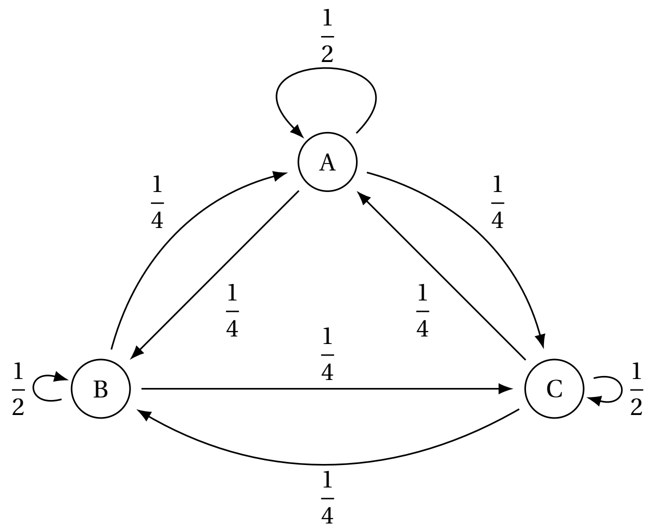
Pour tout n entier naturel, on note également : $p_n = \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$, $q_n = \mathrm{P}(\mathrm{B}_n)$, $r_n = \mathrm{P}(\mathrm{C}_n)$ **ainsi que** $\mathrm{V}_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix}$, **le n-ème état de cette chaîne de Markov.**

Partie I - Modélisation et comportement asymptotique

1. **Représenter la situation par un graphe probabiliste et expliquer pourquoi la matrice de transition est :**

$$\mathrm{M} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

RAS, on traduit gentiment les règles de déplacement décrites par l'énoncé :



2. (a) **Déterminer p_0, q_0, r_0, p_1, q_1, r_1.** Le pion se trouvant en A à l'origine des temps :

$$p_0 = 1, q_0 = r_0 = 0$$

Et en suivant les règles, il se trouve donc, au temps 1, en A avec proba $\frac{1}{2}$ et en B ou C avec proba $\frac{1}{4}$ chacun :

$$p_1 = \frac{1}{2}, q_1 = r_1 = \frac{1}{4}$$

(b) **Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation :** $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{V}_n\mathrm{M}$.

On écrit, au temps n, les probabilités totales avec le SCE $(\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{A}_{n+1}) &= \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)\mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}_n)\mathrm{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) + \mathrm{P}(\mathrm{C}_n)\mathrm{P}_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) \\ p_{n+1} &= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n \end{aligned}$$

où $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) = \frac{1}{2}$ est la probabilité de rester en A ; $\mathrm{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) = \frac{1}{4}$ est la proba de sauter de B vers A ; et $\mathrm{P}_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) = \frac{1}{4}$ est la proba de sauter de C vers A.

L'application de la même formule des probabilités totales permet de montrer de même :

$$q_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n$$

et on reconnaît bien les coefficients du produit matriciel $\mathrm{V}_n\mathrm{M}$: on a donc $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{V}_n\mathrm{M}$.

(c) **En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :** $\mathrm{V}_n = \mathrm{V}_0\mathrm{M}^n$.

Récurrence... (le faire sur votre copie !!)

3. **La chaîne de Markov associée au graphe probabiliste de la question 1 a-t-elle un état stable ? Lequel ?**
On résout VM = V, où $V = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ avec a, b, c positifs de somme 1.
Le système obtenu s'écrit :
$$\begin{cases} 2a+b+c=4a \\ a+2b+c=4b \\ a+b+2c=4c \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c$$
et avec les contraintes sur le signe et la somme $a = b = c = \frac{1}{3}$.
L'unique état stable de cette chaîne est
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
(normal, les 3 sommets jouent le même rôle !)

4. **Soit $n \in \mathbb{N}$.**

   (a) **Démontrer que :** $M^n = \dfrac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$**, où M est la matrice introduite à la question 1.**
   Si la question est tournée ainsi le plus rapide est une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$... qui ne pose aucune sorte de difficulté.

   (b) **Démontrer que** $p_n = \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{2}{4^n}\right)$ **et déterminer alors une expression de q_n et r_n.**
   On a $V_n = V_0 M^n$, ce qui s'écrit :
$$\begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$$
   et V_n est en fait la première ligne de M^n :
$$\begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \end{pmatrix}$$
   On trouve bien $p_n = \dfrac{4^n+2}{3 \cdot 4^n} = \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{2}{4^n}\right)$, et $q_n = r_n = \dfrac{4^n-1}{3 \cdot 4^n} = \dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)$.

5. **Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**
Interpréter ces résultats.
Avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4^n} = 0$ on obtient immédiatement $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \dfrac{1}{3}$; donc (V_n) tend vers l'état stable $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Partie III - Nombre moyen de passages en A et temps d'attente avant le premier passage en B

6. **Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire :**
$$X_n = \begin{cases} 1 \text{ si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 \text{ si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}$$

   (a) **Interpréter la variable aléatoire $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.**
   Quelle est la signification de l'espérance $E(S_n)$?
   On somme des indicatrices... S_n est le nombre d'événements réalisés parmi $A_1, A_2, \ldots, A_n$; c'est donc le nombre de fois où le mobile s'est trouvé en A entre les instants 1 et n.
   Son espérance $E(S_n)$ est donc le nombre moyen de passages en A sur les n premières étapes de temps.

(b) **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n.**

X_n est une variable de Bernoulli, donc elle admet une espérance.
$E(X_n) = 0 \times P(\overline{A_n}) + 1 \times P(A_n) = P(A_n) = p_n$.

(c) **En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre moyen de passages en A entre l'étape 1 et l'étape n.**
D'après ce qu'on vient de dire ce nombre moyen est $E(S_n)$.
Par linéarité de l'espérance,

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k$$

On injecte l'expression de p_k et on reconnaît une somme géométrique :

$$\begin{aligned}
E(S_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k \\
&= \frac{n}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{4}\frac{1-(1/4)^n}{1-1/4} \\
E(S_n) &= \frac{n}{3} + \frac{2}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

(NB : qui est bien $\sim \dfrac{n}{3}$ pour n grand...le mobile passe environ $\dfrac{1}{3}$ de son temps en A.)

7. **On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante : T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B, et dans le cas où le point ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$.**
Le but de cette question est de déterminer la loi de la variable aléatoire T_B ainsi que son espérance.

(a) **Calculer les probabilités $P(T_B = 1)$ et $P(T_B = 2)$.**
Le mobile est pour la première fois en B au temps 1 ssi il saute de A en B au temps 1... donc $P(T_B = 1) = \dfrac{1}{4}$ (rappel : on est initialement en A).
Le mobile est pour la première fois en B au temps 1 ssi :

- il reste en A au temps 1 puis saute en B au temps 2 (événement $A_1 \cap B_2$)
- ou il saute en C au temps 1 puis en B au temps 2 (événement $C_1 \cap B_2$).

Donc $P(T_B = 2) = P(A_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap B_2)$ (par incompatibilité) ; puis

$$P(T_B = 2) = P(A_1)P_{A_1}(B_2) + P(C_1)P_{C_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

(b) **Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'événement $\overline{B_n}$ à l'aide des événements A_n et C_n.**

$\overline{B_n} = A_n \cap C_n$ (si on n'est pas en B, on est en A ou en C !).

(c) **Démontrer que $P(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \dfrac{1}{4}P(\overline{B_2} \cap \overline{B_1})$.**
En déduire que $P_{\overline{B_2} \cap \overline{B_1}}(B_3) = \dfrac{1}{4}$.
On calcule séparément ces deux probabilités.
L'événement $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3$ (qui n'est autre que $(T_B = 3)$) correspond aux parcours (en omettant la position initiale A) : A – A – B, A – C – B, C – A – B, C – C – B ; la proba de rester en un sommet étant $\dfrac{1}{2}$ et celle de sauter à un autre sommet étant $\dfrac{1}{4}$ on obtient, par incompatibilité :

$$P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{4+2+1+2}{64} = \frac{9}{64}$$

tandis que $(\overline{B_1} \cap \overline{B_2})$ correspond aux parcours A – A, A – C, C – A, C – C ; d'où

$$P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{4+2+1+2}{16} = \frac{9}{16}$$

On observe bien l'égalité demandée. De plus en divisant par $P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2})\neq 0$, on a :

$$P_{\overline{B_2}\cap\overline{B_1}}(B_3)=\frac{P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap B_3)}{P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2})}=\frac{1}{4}$$

Dans la suite de l'exercice, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$***, on note*** D_n ***l'événement*** $\bigcap_{k=1}^{n}\overline{B_k}$ ***et on admettra que :*** $P_{D_n}(B_{n+1})=\dfrac{1}{4}$.

(d) **Soit** $k\in\mathbb{N}^*$**. Calculer la probabilité** $P(T_B=k)$**.**
En déduire la probabilité $P(T_B=0)$**.**
L'événement $(T_B=k)$ signifie qu'on n'est pas en B aux temps $1,2,3,\dots,k-1$; et qu'on y est au temps k.
On a donc $(T_B=k)=\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}\cap B_k=D_{k-1}\cap B_k$.
On applique une formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}P(T_B=k)&=P\left(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}\cap B_k\right)\\&=P(\overline{B_1})\times P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2})\times P_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}}(\overline{B_3})\times\cdots\times P_{\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{k-2}}}(\overline{B_{k-1}})\times P_{\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{k-1}}}(B_k)\\&=P(\overline{B_1})\times P_{D_1}(\overline{B_2})\times P_{D_2}(\overline{B_3})\times\cdots\times P_{D_{k-2}}(\overline{B_{k-1}})\times P_{D_{k-1}}(B_k)\end{aligned}$$

Maintenant, sachant que P_{D_n} est une probabilité, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$P_{D_n}(\overline{B_{n+1}})=1-P_{D_n}(B_{n+1})=\frac{3}{4}$$

ce qui donne en reprenant l'expression précédente :

$$\begin{aligned}P(T_B=k)&=P(\overline{B_1})\times P_{D_1}(\overline{B_2})\times P_{D_2}(\overline{B_3})\times\cdots\times P_{D_{k-2}}(\overline{B_{k-1}})\times P_{D_{k-1}}(B_k)\\&=\underbrace{\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{3}{4}}_{k-1\text{ termes}}\times\frac{1}{4}\\P(T_B=k)&=\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\times\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Enfin $P(T_B=0)=1-\sum_{k=1}^{+\infty}P(T_B=k)=0$ car la somme est la somme des termes de la loi géométrique $\mathcal{G}(1/4)$, donc est égale à 1.

(e) **Justifier que la variable aléatoire** T_B **admet une espérance. Quelle est l'espérance de** T_B **?**
On voit donc que $T_B\hookrightarrow\mathcal{G}(1/4)$. D'où l'existence de l'espérance de T_B, et $E(T_B)=4$.