Variables aléatoires à densité
Exercices

Exercice 1. (*)

1. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité X. Donner une densité de X.
2. Soit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 3t^2 \text{ si } 0 \leqslant t < 1 \\ 0 \text{ si } t \geqslant 1 \end{cases}$. Montrer que g est une densité de probabilité.
   On note Y une variable aléatoire de densité g ; donner la fonction de répartition de Y.

Exercice 2. (*)
Soit $g(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 1 \\ \dfrac{3}{t^4} \text{ si } t \geqslant 1 \end{cases}$

1. **(*)** Montrer que g est une densité de probabilité. On note X une variable aléatoire de densité g.
2. **(*)** Étudier l'existence de E(X) et V(X) ; les calculer en cas d'existence.
3. **(*)** Soit $Y = \ln(X)$. Calculer E(Y) à l'aide du théorème de transfert.
4. Déterminer une densité de Y ; retrouver alors la valeur de E(Y).

Exercice 3 (d'après EML 1996)**.**

Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} \text{ si } -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1. Déterminer le réel $\alpha > 0$ tel que f soit une densité de probabilité. On note alors X une variable aléatoire de densité f.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. Soit $Y = |X|$. Donner la fonction de répartition de Y ; montrer que Y est à densité, et en donner une densité.

Exercice 4 (Lois de fonctions de X)**. (*)**
Dans les trois cas suivants, donner la loi de Y, montrer que Y est à densité, et en donner une densité.

1. **(*)** $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$, $Y = \sqrt{X}$.
2. $X \hookrightarrow \mathscr{U}([-1,1])$, $Y = X^2$.
3. **(*)** $X \hookrightarrow \mathscr{E}(2)$, $Y = e^X$.

Exercice 5. Soit F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = \dfrac{1}{1+e^{-t}}$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité. On note X une telle variable.
   NB : on dit que X suit la loi logistique.

2. Montrer que X admet une densité paire. Montrer que X admet une espérance, et la calculer.

3. Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $V = \ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$.
   NB : pour que V soit bien définie, on doit supposer ici que $U(\Omega) =]0,1[$, *ce qui ne change rien en pratique car la probabilité que U soit hors de cet intervalle est nulle.*

Exercice 6. Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme $\mathcal{U}\big([0,1]\big)$. On pose

$$U = \max\big(X_1, X_2, \dots, X_n\big) \qquad V = \min\big(X_1, X_2, \dots, X_n\big)$$

1. **(*)** Donner les fonctions de répartition de U et V.

2. **(*)** Montrer que U et V sont des variables aléatoires à densité ; donner une densité pour chacune de ces deux variables.

3. Reprendre l'exercice en supposant que les X_i suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 7 (EDHEC 2021 un peu adapté)**.**

1. (a) Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \text{ si } x > 0 \end{cases}$ peut être vue comme la fonction de répartition d'une variable X à densité.
   Donner une densité de X.

2. (a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X.

   (b) On note G la fonction de répartition de X. Déterminer $G(x)$ pour $x \geqslant 1$, puis pour $x < 1$.

3. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$; on admet que M_n est une variable aléatoire à densité.

   (a) On note G_n la fonction de répartition de M_n. Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de x.

   (b) On pose $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par:

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}.$$

4. Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. (a) Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.

   (b) Calculer, pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

NB : on dit que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de* Y.

Exercice 8. Soient X et U deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, et U suit la loi uniforme sur $\{-1,1\}$.
On définit $Y = UX$.

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(Y \leqslant x) = \dfrac{1}{2}\big(P(X \leqslant x) + P(X \geqslant -x)\big)$.
2. En déduire que Y suit la loi normale centrée réduite.
3. Calculer l'espérance de U ; en déduire que $E(XY) = 0$.
4. Montrer que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.
5. (a) Rappeler la valeur de $E\left(X^2\right)$ et en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$
   (b) Montrer, grâce à une intégration par parties que
   $$\forall A \in \mathbb{R}_+,\qquad \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3\int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$
   (c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ converge et vaut $\dfrac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.
   (d) Établir finalement que X possède un moment d'ordre 4 et que $E\left(X^4\right) = 3$
6. (a) Vérifier que $E\left(X^2Y^2\right) = 3$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Cov}\left(X^2, Y^2\right)$.
   (c) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes. Montrer alors que X et Y ne le sont pas non plus.
   (d) Cet exercice a permis de montrer qu'un résultat classique concernant les variables discrètes est encore valable pour les variables à densité. Lequel ?

Exercice 9.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(1)$. On pose
$$Y = \lfloor X \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad Z = X - \lfloor X \rfloor$$

1. Déterminer $Y(\Omega)$.
2. Reconnaître la loi de Y, et calculer son espérance.
3. Déterminer $Z(\Omega)$.
4. Soit $t \in [0,1[$. Montrer : $P(Z \leqslant t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (F_X(k+t) - F_X(k))$. En déduire la fonction de répartition de Z ; montrer que Z est à densité, et en donner une densité.

Quelques compléments sur la loi normale

Exercice 10. Soient X_1 et X_2 indépendantes ; on suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. Rappeler les densités de X_1 et X_2.
2. Donner la loi de la variable $X_1 - X_2$.
3. On cherche à calculer $P(X_1 \leqslant X_2)$.
   Soit
   $$U = \frac{X_1 - X_2 - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$
   Montrer que $U \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Exprimer l'événement $(X_1 \leqslant X_2)$ en fonction de U ; en déduire que
   $$P(X_1 \leqslant X_2) = \Phi\left(\frac{m_2 - m_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)$$

Exercice 11. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$. On définit $Y = X^2$; on note F_Y la fonction de répartition de Y.

1. Déterminer $F_Y(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer une densité de Y.
3. En déduire que
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \, dt = \sqrt{\pi}$$

Exercice 12. Soit $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, $X = N + |N|$, et $Y = N|N|$.

1. Déterminer l'espérance de Y.
2. Montrer que Y admet une variance. Calculer $E(Y^2)$ à l'aide d'une IPP (en intégrant $xe^{-x^2/2}$) ; puis $V(Y)$.
3. Montrer que $P(X = 0) = P(N \leqslant 0) = \frac{1}{2}$.
4. Déterminer $P(X \leqslant x)$ pour $x < 0$.
5. Soit $x > 0$. En utilisant le SCE $\{(N > 0), (N \leqslant 0)\}$, montrer que
$$P(X \leqslant x) = P\left(0 < N \leqslant \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}$$
En déduire $P(X \leqslant x) = \Phi\left(\frac{x}{2}\right)$, où on a noté Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
6. La variable X est-elle à densité ? Est-elle discrète ?

Solutions

1

2

3 1. f est clairement positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ comme composée de fonctions continues.
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-|x|}\,dx$ converge comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.
On trouve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-|x|}\,dx = \int_{-\alpha}^{0} e^{x}\,dx + \int_{0}^{\alpha} e^{-x}\,dx = [e^x]_{-\alpha}^{0} + [-e^{-x}]_0^{\alpha} = 1 - e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + 1 = 2 - 2e^{-\alpha}$$

Pour que cette intégrale fasse 1, il faut et il suffit que $2-2e^{-\alpha}=1$, ce qui donna $\alpha=\ln(2)$.

2. On a donc : $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant -\ln(2) \\ e^x \text{ si } -\ln(2) \leqslant x \leqslant 0 \\ e^{-x} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant \ln(2) \\ 0 \text{ si } x \geqslant \ln(2) \end{cases}$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Il faut découper cette intégrale en autant de morceaux que nécessaire ; et à chaque calcul on utilise la formule du point précédent.

   - Pour $x \leqslant -\ln(2)$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$
   - Pour $-\ln(2) \leqslant x \leqslant 0$, $F(x) = F(-\ln(2)) + \int_{-\ln(2)}^{x} e^t\,dt = 0 + [e^t]_{-\ln(2)}^{x} = e^x - \frac{1}{2}$
   - Pour $0 \leqslant x \leqslant \ln(2)$, $F(x) = F(0) + \int_0^x e^{-t}\,dt = \frac{1}{2} - [e^{-t}]_0^x = \frac{3}{2} - e^{-x}$
   - Pour $x \geqslant \ln(2)$, $F(x) = F(\ln(2)) + \int_{\ln(2)}^{x} 0\,dt = 1$

3. X est à valeurs dans $[-\ln(2), \ln(2)]$ (hors de cet intervalle la densité est nulle) ; donc X admet une espérance. $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} x e^{-|x|}\,dx$; en posant $u=-x$ on montre que $E(X) = -E(X)$, ce qui donne $E(X)=0$ (ceci est en fait une conséquence de la parité de f).

4. $Y = |X|$ est à valeurs positives, donc $\forall\, x<0,\ F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = 0$.

   Pour $x<0$, $F_Y(x) = P(|X| \leqslant x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = F_X(x) - F_X(-x)$.

   - Si $0 \leqslant x \leqslant \ln(2)$ on a aussi $-\ln(2) \leqslant -x \leqslant 0$; d'où

   $$F_Y(x) = F_X(x) - F_X(-x) = \frac{3}{2} - e^{-x} - \left(e^{-x} - \frac{1}{2}\right) = 2(1-e^{-x})$$

   - Si $x \geqslant \ln(2)$ on a aussi $-x \leqslant -\ln(2)$; d'où

   $$F_Y(x) = F_X(x) - F_X(-x) = 1 - 0 = 1$$

   Finalement :

   $$F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ 2(1-e^{-x}) \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant \ln(2) \\ 1 \text{ si } x \geqslant \ln(2) \end{cases}$$

   On montre que cette fonction est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0,\ln(2)\}$, et $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ en étudiant les limites à gauche et à droite en et $\ln(2)$. Il s'ensuit que Y est à densité, et

   $$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0,\ln(2)\},\quad f_Y(x) = F_Y'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ 2e^{-x} \text{ si } 0<x<\ln(2) \\ 0 \text{ si } x>\ln(2) \end{cases}$$

   et on complète avec $f_Y(0) = f_Y(\ln(2)) = 0$.

4 1. On trouve $F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ x^2 \text{ si } 0 \leqslant x \geqslant 1 \\ 1 \text{ si } 0 \leqslant x \geqslant 1 \end{cases}$ puis $f_Y(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

2. On trouve $F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x} \text{ si } 0 \leqslant x \geqslant 1 \\ 1 \text{ si } 0 \leqslant x \geqslant 1 \end{cases}$ puis $f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \text{ si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

3. On trouve $F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$ puis $f_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 1 \\ \frac{2}{x^3} \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$

5

6 Si $X_1, \ldots, X_n$ iid suivent la loi de X, $F_U(x) = (F(x))^n$ et $1 - F_V(x) = (1 - F(x))^n$ (cf. cours pour argumenter ça correctement). On en déduit :

1.

2.

3. $F_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ (1 - e^{-\lambda x})^n \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$ puis $f_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} \text{ si } x > 0 \end{cases}$
$V \hookrightarrow \mathscr{E}(n\lambda)$.

7 1. On vérifie les propriétés usuelles (dans l'ordre ! car certains points utilisent les précédents):

- $\to 0$ en $-\infty$, $\to 1$ en $+\infty$
- $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (fonctions usuelles) + continue en 0 en examinant les limites
- Sur $\mathbb{R}^*$, $F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{2}{x^3} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \text{ si } x > 0 \end{cases}$ est $\geqslant 0$; avec la continuité sur $\mathbb{R}$ on obtient la croissance sur $\mathbb{R}$.

On a donc bien la fonction de répartition d'une variable à densité. En dérivant sur $\mathbb{R}^*$, et en posant $f_X(0) = 0$, on obtient une densité : $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

2. (a) Pas de difficulté sur les 3 propriétés usuelles à vérifier.

   (b) $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$.

   - Si $x < 1$, $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$
   - Si $x \geqslant 1$, $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} \frac{2}{t^3}\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{x^2}$.

3. (a) $G_n(x) = G(x)^n = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ (loi du max de n variables indépendantes de même loi, cf. cours)

   (b) Pour tout réel x,

$$F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right) = P\left(M_n \leqslant x\sqrt{n}\right)$$

donc

$$F_n(x) = G_n(x\sqrt{n}) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{(x\sqrt{n})^2}\right)^n & \text{si } x\sqrt{n} \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x\sqrt{n} < 1 \end{cases}$$

donc

$$F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

(c)

4. $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ (car $F_n(x)$ est toujours nul si $x \leqslant 0$!)

5. (a) $n > \left\lfloor \dfrac{1}{x^2} \right\rfloor \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{x^2}$; dans ce cas $x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et alors $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.

   (b) Si $n \to +\infty$, et $x > 0$ est fixé, n deviendra à un moment plus grand que la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$; et à partir de là on aura $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.
   On en déduit : $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$; et par suite $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ (limite archi-classique !!)

8

9

10

11 1. $F_Y(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y \leqslant 0 \\ \Phi(\sqrt{2y}) \text{ si } y > 0 \end{cases}$ en faisant intervenir la variable $\sqrt{2}X$ dont il faut montrer qu'elle est centrée réduite.

2. Rappel : $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. On trouve $F_Y(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{\pi y}} e^{-y} \text{ si } y > 0 \end{cases}$
   NB : il y a un bug, il faudrait trouver $\dfrac{1}{\sqrt{\pi y}} e^{-y}$...

3. L'intégrale d'une densité vaut 1.
   NB : cet exo est en fait devenu HP : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est impropre en 0...

12 1. Par théorème de transfert et sous condition de cv absolue :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x|x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

Pour la cv absolue on s'intéresse à la cv de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

qui converge bien, car elle définit le moment d'ordre 2 d'une variable suivant $\mathcal{N}(0,1)$.
Y admet donc une espérance ; et $E(Y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x|x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$ est nulle car on intègre sur $\mathbb{R}$ une fonction impaire.

2. Y admet une variance ssi elle admet un moment d'ordre 2 ; donc ssi $E(Y^2)$ existe. Mais $Y^2 = (N|N|)^2 = N^4$ donc on demande en fait l'existence de $E(N^4)$; ce qui est le cas si $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ (N admet des moments de tous ordres !).
   En reprenant le calcul de l'exo 8 : $E(Y^2) = E(N^4) = 3$ puis $V(Y) = 3$.

3. On a $X = 0$ ssi $|N| = -N$, donc ssi $N \leqslant 0$ (définition de la valeur absolue !).
   Donc $P(X = 0) = P(N \neq 0) = \Phi(0) = \dfrac{1}{2}$ car Φ est la fonction de répartition de N.

4. $P(X \leqslant x) = P(N + |N| \leqslant x)$.
   Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a toujours $a + |a| \geqslant 0$; donc si $x < 0$ l'événement $(N + |N| \leqslant x)$ est impossible.
   On en déduit : $\forall\, x < 0,\ P(X \leqslant x) = P(N + |N| \leqslant x) = 0$.

5. Soit $x > 0$. Avec les probas totales et le SCE indiqué :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant x) &= \mathrm{P}((\mathrm{X} \leqslant x) \cap (\mathrm{N} > 0)) + \mathrm{P}((\mathrm{X} \leqslant x) \cap (\mathrm{N} \leqslant 0)) \\
&= \mathrm{P}((\mathrm{N} + |\mathrm{N}| \leqslant x) \cap (\mathrm{N} > 0)) + \mathrm{P}((\mathrm{N} + |\mathrm{N}| \leqslant x) \cap (\mathrm{N} \leqslant 0)) \\
&= \mathrm{P}((2\mathrm{N} \leqslant x) \cap (\mathrm{N} > 0)) + \mathrm{P}((0 \leqslant x) \cap (\mathrm{N} \leqslant 0))
\end{aligned}$$

en utilisant les expressions de $\mathrm{N} + |\mathrm{N}|$ pour $\mathrm{N} > 0, \mathrm{N} \leqslant 0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant x) &= \mathrm{P}((2\mathrm{N} \leqslant x) \cap (\mathrm{N} > 0)) + \mathrm{P}((0 \leqslant x) \cap (\mathrm{N} \leqslant 0)) \\
&= \mathrm{P}(0 < \mathrm{N} \leqslant \frac{x}{2}) + \mathrm{P}((0 \leqslant x) \cap (\mathrm{N} \leqslant 0))
\end{aligned}$$

$(0 \leqslant x)$ est vrai par hypothèse, donc $\mathrm{P}((0 \leqslant x) \cap (\mathrm{N} \leqslant 0)) = \mathrm{P}(\mathrm{N} \leqslant 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$.

Finalement

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant x) = \mathrm{P}(0 < \mathrm{N} \leqslant \frac{x}{2}) + \frac{1}{2}$$

Φ étant le fonction de répartition de N : $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant x) = \Phi(\frac{x}{2}) - \Phi(0) + \frac{1}{2} = \Phi(\frac{x}{2})$.

6. Récapitulons : la fonction de répartition de X est

$$\mathrm{F}_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \Phi\left(\frac{x}{2}\right) \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On voit que $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc X n'est pas discrète ; et $\lim\limits_{x \to 0^+} \Phi(x) = \Phi(0) = \frac{1}{2} \neq \lim\limits_{x \to 0^-} \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(x) = 0$; donc F_{X} est discontinue en 0 ; donc X n'est pas uen variable à densité.