Concours Blanc n°2 – Maths 1

4/03/2024

Durée : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Cet énoncé comporte deux problèmes indépendants.
Au cours de la résolution, on pourra utiliser les définitions et résultats suivants :

Dans tous les codes Python qui suivent, on supposera les imports suivants réalisés :

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
```

On rappelle que la commande `rd.exponential(a)` renvoie un tirage d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle, telle que $E(X) = a$.

Problème 1

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées seront supposées définies sur cet espace.

Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

1. Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

2. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x, \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

3. (a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$?

   (b) Écrire une fonction en Python qui utilise seulement la commande `rd.random` et qui, étant donné un réel λ strictement positif, renvoie des tirages d'une variable X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ qui, à tout ω de Ω, associe le plus grand des réels $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Partie II : Loi de la variable aléatoire T_n

4. (a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, la probabilité $P(T_n \leqslant x)$.

   (b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction f_n.

5. (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n admet une espérance.

   (b) Déterminer $E(T_2)$ (on pourra faire apparaître des espérances de lois exponentielles dans ces calculs).

6. (a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\dfrac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$.

   (b) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x.$$

   (c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $E(T_{n+1})$ et $E(T_n)$, puis une expression de $E(T_n)$ sous forme d'une somme.

Partie III : Loi du premier dépassement

Dans toute cette partie, a désigne un réel strictement positif.
On définit la variable aléatoire N égale au plus petit entier n de $\mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité d'événements : $(N = 0) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_k \leqslant a)$.

   En admettant que $P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}(X_k \leqslant a)\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k \leqslant a)\right)$, montrer que $P(N = 0) = 0$.

8. Compléter la fonction suivante pour qu'elle génère des tirages de la variable aléatoire N pour une valeur de a passée en argument (la question précédente assure qu'un tel programme terminera presque sûrement).

```
def tirageN(a):
    X = rd.exponential(....)
    N=1
    while ......... :
        N = ......
        X =
    return N
```

9. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(N = n) = (1 - e^{-a})^{n-1} e^{-a}$.

10. En reconnaissant la loi de N, déterminer $E(N)$ et $V(N)$.

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire Z, définie pour tout ω de Ω par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}$$

11. Expliquer ce que représente la variable Z. En déduire : $P(Z \leqslant a) = 0$.

12. Soit $x \in]a, +\infty[$.

    (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité d'événements :

$$\big((N = n) \cap (Z \leqslant x)\big) = \begin{cases} (a < X_1 \leqslant x) & \text{si } n = 1 \\ (T_{n-1} \leqslant a) \cap (a < X_n \leqslant x) & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$$

    En déduire la probabilité $P\big((N = n) \cap (Z \leqslant x)\big)$.

(b) Montrer alors : $P(Z \leqslant x) = 1 - e^{a-x}$.

13. (a) Montrer que la variable aléatoire $Z - a$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

    (b) En déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$, ainsi que l'existence et la valeur de $V(Z)$.

14. Comment modifier la fonction de la question 8 pour qu'elle simule des tirages de la variable Z ?
    On utilise cette dernière fonction, avec $a = 3$, pour générer une liste de 10000 tirages de Z ; on note L la liste ainsi obtenue.
    La commande

```
plt.hist(L,np.arange(0,10,0.5))
plt.show()
```

renvoie l'un des trois graphiques suivants. Lequel ? Justifier.

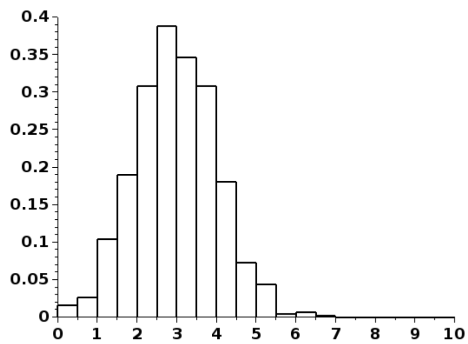

Figure 1

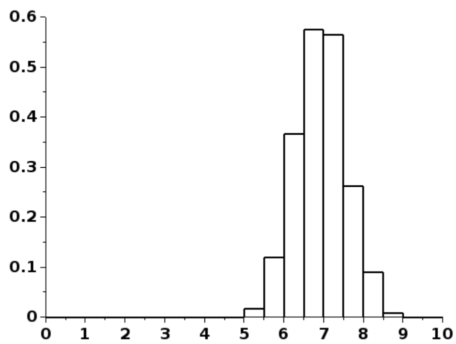

Figure 2

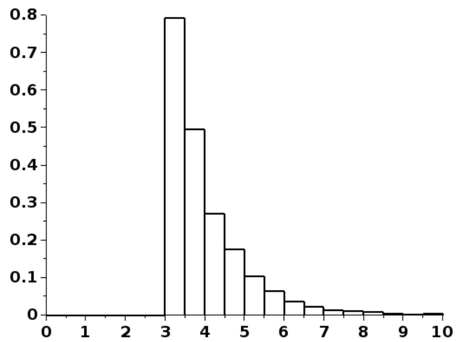

Figure 3

Exercice 2 : Système différentiel aléatoire

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes de même loi $\mathscr{U}\left(\{-1,1\}\right)$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$ (que l'on ne cherchera pas à expliciter) et on pose, pour tout $\omega\in\Omega$,

$$M(\omega)=\begin{pmatrix}X_1(\omega) & X_2(\omega)\\ X_2(\omega) & X_1(\omega)\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

1. Justifier que, pour tout $\omega\in\Omega$, $M(\omega)$ est une matrice diagonalisable. Est-elle inversible ?
2. Montrer que, pour tout $\omega\in\Omega$, $\mathrm{Sp}(M(\omega))=\{X_1(\omega)+X_2(\omega);X_1(\omega)-X_2(\omega)\}$.
3. Déterminer une matrice inversible $P\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $\omega\in\Omega$, $P^{-1}M(\omega)P=D(\omega)$, où $D(\omega)$ est une matrice diagonale à expliciter.
4. On considère le système différentiel linéaire à coefficients aléatoires

$$(S)\ :\ \begin{cases}y_1'=X_1y_1+X_2y_2\\ y_2'=X_2y_1+X_1y_2\end{cases}$$

   (qui est à coefficients constants : par exemple si X_1 et X_2 prennent la valeur 1, le système est $\begin{cases}y_1'=y_1+y_2\\ y_2'=y_1+y_2\end{cases}$).

   On pose, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $Y(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}$; on admet qu'alors $Y'(t)=\begin{pmatrix}y_1'(t)\\ y_2'(t)\end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que, pour tout $\omega\in\Omega$, Y est solution de (S) si et seulement si $Y'=M(\omega)Y$.

   (b) Soit $\omega\in\Omega$ fixé.

      i. Déterminer, pour tout $\omega\in\Omega$ l'ensemble des solutions de (S).

      ii. Calculer la probabilité que le système admette des états d'équilibres autres que $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

      iii. Calculer la probabilité que toutes les solutions du système soient convergentes.

Exercice 3 : Une marche au hasard

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.
Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n\in\mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable, sur l'un des points d'abscisse $0,1,\dots,n$.
Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0=0$).
On admet que, pour tout entier naturel n, X_n est une variable aléatoire définie un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. (a) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, la loi de X_n.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, X_n possède une espérance et une variance, puis déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

2. On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile ; c'est-à-dire le plus petit entier $n>0$ tel que $X_n=0$. On convient que $Y=0$ si un tel entier n n'existe pas.
   On admet que Y est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$.

   (a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement $[Y=n]$ à l'aide des variables aléatoires $X_1,X_2,\dots,X_n$.

   (b) En déduire que la loi de Y est définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(Y=n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

   (c) Vérifier par le calcul que l'on a : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}P(Y=n)=1$. Comment interpréter ce résultat ?

   (d) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Donner un encadrement de $\dfrac{1}{t}$ valable pour tout $t \in [k, k+1]$.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$; puis que :

$$\forall\, j \geqslant 2,\ \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \geqslant \ln(j)$$

   (c) Montrer qu'on a aussi $\displaystyle\sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k} \leqslant \ln(j)$; en déduire finalement :

$$\forall\, j \geqslant 2,\ \ln(j) \leqslant \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leqslant \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}$$

   (d) Conclure alors que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j \to +\infty}{\sim} \ln(j)$.

4. On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile ; c'est-à-dire le plus petit entier $k > \mathrm{Y}$ tel que $\mathrm{X}_k = 0$. On admet que Z est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.

   (a) Déterminer pour tout $i \geqslant j$, la probabilité $\mathrm{P}_{[\mathrm{Y}=i]}(\mathrm{Z} = j)$.

   (b) Établir que :

$$\forall\, i \leqslant j-1, \quad \mathrm{P}_{[\mathrm{Y}=i]}(\mathrm{Z} = j) = \frac{i+1}{j(j+1)}$$

   (c) Écrire, pour tout entier naturel j supérieur ou égal à 2, la probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{Z} = j)$ comme une somme finie qu'on ne cherchera pas à calculer.

   (d) La variable aléatoire Z possède-t-elle une espérance ?