CB 2
Math 1
Corrigé

Problème 1

Partie 1

1. Cours : Densité $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Fct rép. $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$; $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

2. $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ où f est la densité de la fct° précédente ; l'intégrale valant 1,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx \text{ converge, et } \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}}$$

$$\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} x . \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$ et on reconnait l'intégrale

donnant l'espérance de $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Or $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

D'où $\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx$ cv, et $\boxed{\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}}$

3a. Calculons la fonct° de répartit° de V.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(V \leq x) = P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln(1-U) \leq x\right)$

$= P\left(\ln(1-U) \geq -\lambda x\right)$

stricte $\nearrow$ d'exp. sur $\mathbb{R}$

$= P\left(1-U \geq e^{-\lambda x}\right)$

$= P\left(U \leq 1-e^{-\lambda x}\right)$

$$F_V(x) = F_U\left(1-e^{-\lambda x}\right)$$

Or $F_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \in [0,1] \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ $\left(U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])\right)$

d'où $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1-e^{-\lambda x} < 0 \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } 1-e^{-\lambda x} \in [0,1] \\ 1 & \text{si } 1-e^{-\lambda x} > 1. \end{cases}$

On remarque alors :

$$1 - e^{-\lambda x} < 0 \iff e^{-\lambda x} > 1 \iff -\lambda x > 0 \iff \underline{\underline{x < 0}}$$

$$0 \leq 1 - e^{-\lambda x} \leq 1 \iff -1 \leq e^{-\lambda x} - 1 \leq 0$$

$$\iff 0 \leq e^{-\lambda x} \leq 1$$

$$\iff -\lambda x \leq 0$$

$$\iff \underline{\underline{x \geq 0}}$$

et $1 - e^{-\lambda x} > 1 \iff e^{-\lambda x} < 0$: impossible.

D'où $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ et on trouve bien $\boxed{V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)}$

3b. Avec les imports donné en début de sujet

```
def simu_exp(lambd):
    u = rd.random()
    return -1/lambd * np.log(1-u)
```

NB : "lambda" est un mot clé réservé en Python donc inutilisable (mais vous ne serez probabl' pas pénalisé·e...)

4a. Loi du max sans souci !

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(T_n \leq x) = P\left(\max(X_1 \dots X_n) \leq x\right)$$
$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leq x)\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) \quad \text{par indép. des } X_i$$
$$= \left(F(x)\right)^n \quad \text{où } F \text{ est la fct° rép. de } \mathcal{E}(1)$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{T_n}(x) = F(x)^n$$

4b. $\mathcal{E}(1)$ est une loi à densité donc F est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$; F_{T_n} l'est donc aussi, et T_n est à densité.

On obtient une densité de T_n en dérivant sur $\mathbb{R}^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1-e^{-x})^n & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

d'où $$\boxed{f_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

et on complète en 0 pour obtenir l'expression demandée.

$$\boxed{T_n \text{ admet donc } f_n \text{ pour densité}}$$

5a. On s'intéresse à la cv absolue de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \underbrace{n x e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}}_{\geqslant 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ donc la cv "simple" suffit.}} dx$$

La fct° à intégrer est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$

$$\text{et } n x e^{-x}(\underbrace{1-e^{-x}}_{\longrightarrow 1})^{n-1} \underset{x \to +\infty}{\sim} n x e^{-x}$$

Or $\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx$ cv (cf q.2, avec $\lambda = 1$)

d'où par comparaison de fct° $\geqslant 0$: l'intégrale donnant $E(T_n)$ cv

et $\boxed{T_n \text{ admet une espérance.}}$

5b. Pour $n = 2$:

$$E(T_2) = \int_0^{+\infty} 2x e^{-x}(1-e^{-x})\,dx$$

$$= 2\left(\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx - \int_0^{+\infty} x e^{-2x}\,dx\right)$$ [découpage en intégrales cv.]

$$= 2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) \quad \text{(question 2)}$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \boxed{E(T_2) = \frac{3}{2}}$$

6a. On vérifie bravement.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+ : f_{n+1}(x) = (n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^n$$

d'où $$f_{n+1}'(x) = (n+1)\left(-e^{-x}(1-e^{-x})^n + ne^{-2x}(1-e^{-x})^{n-1}\right)$$

et $$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^n - ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}$$
$$= e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}\left((n+1)(1-e^{-x}) - n\right)$$
$$= e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}(\cancel{n} - ne^{-x} + 1 - e^{-x} - \cancel{n}) \quad (*)$$

On retravaille : $$-\frac{1}{n+1} f_{n+1}'(x) = e^{-x}(1-e^{-x})^n - ne^{-2x}(1-e^{-x})^{n-1}$$
$$= e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}(1 - e^{-x} - ne^{-x}) \quad (**)$$

et avec $(*)$ et $(**)$ on obtient bien :

$$\boxed{\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1} f_{n+1}'(x)}$$

6b. On commence par se placer sur un segment : soit $A \geq 0$.

D'après 6a :

$$\int_0^A x\left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)dx = -\frac{1}{n+1}\int_0^A x f_{n+1}'(x)\,dx$$ et on fait l'IPP en dérivant x et en intégrant f_{n+1}' (tts les fct° sont $\mathcal{C}^1$)

$$= -\frac{1}{n+1}\left(\left[x f_{n+1}(x)\right]_0^A - \int_0^A f_{n+1}(x)\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{n+1}\left(A f_{n+1}(A) - \int_0^A f_{n+1}(x)\,dx\right)$$

$$\int_0^A x\left(f_{n+1}(x)-f_n(x)\right)dx = \frac{1}{n+1}\int_0^A f_{n+1}(x)\,dx - \frac{1}{n+1}A\,f_{n+1}(A).$$

Pour $A \to +\infty$: $A\,f_{n+1}(A) \underset{A\to+\infty}{\sim} A(n+1)e^{-A}$ (équivalent vu en 5a)

donc $\to 0$ par croiss. comp.

d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\left(f_{n+1}(x)-f_n(x)\right)dx = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\,dx$

6c En découpant l'intégrale de gauche (ttes les intégrales convergent)
et en remarquant $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{n+1}(x)\,dx = 1$

On trouve $E(T_{n+1}) - E(T_n) = \dfrac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow \boxed{E(T_{n+1}) = E(T_n) + \frac{1}{n+1}}$$

Montrons alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.}$

- pour $n=1$, $T_1 = X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc $\underline{E(T_1)=1}$
- si $E(T_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, alors $E(T_{n+1}) = E(T_n) + \dfrac{1}{n+1}$
$$= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$$

<u>d'où la propriété par récurrence</u>

Partie III

7\. $N=0$ ssi il n'y a aucun tirage tel que $X_n > a$;

d'où $\boxed{(N=0) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_k \leq a)}$

Avec le résultat admis :

$$P(N=0) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leq a)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq a) \quad \text{par indep des } X_k$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (1-e^{-a})^n \quad \text{car les } X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$$

Or $a>0$ donc $0 < e^{-a} < 1$

donc $1-e^{-a} \in]0,1[$

$$\Rightarrow \boxed{P(N=0) = \lim_{n\to+\infty} (1-e^{-a})^n = 0}$$

8\.

```
def tirageN(a):
    X= rd.exponential(1)      # (E(1))
    N = 1          # compteur
    while X<=a :    # tant que a n'est pas dépassé
        N=N+1      # on incrémente le compteur
        X=rd.exponential(1)    # et on refait un tirage.
    return N
```

9. On observe :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $N = n$ ssi $X_1 \leq a$, $X_2 \leq a$, ...

... $X_{n-1} \leq a$, $X_n > a$

D'où $P(N=n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} (X_k \leq a) \cap (X_n > a)\right)$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(X_k \leq a)\right) \times P(X_n > a) \quad \text{(indep des } X_i\text{)}$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n-1} F_{X_k}(a)\right) \times \left(1 - F_{X_n}(a)\right) \quad \text{avec les fct° rep. des } X_i$$

$$\boxed{P(N=n) = (1-e^{-a})^{n-1} \times e^{-a}}$$

On reconnaît : $\boxed{N \hookrightarrow \mathcal{G}(e^{-a})}$

10. D'où $E(N) = \dfrac{1}{e^{-a}} = \underline{\underline{e^{a}}}$

et $V(N) = \dfrac{1-e^{-a}}{e^{-2a}} = \underline{\underline{e^{2a} - e^{a}}}$.

11. Z ainsi définie est la valeur prise par le premier " X " qui dépasse a. Par déf$^{\text{n}}$ cette valeur est $> a$!!

D'où $\boxed{P(Z \leq a) = 0}$

12a- On a $(N=n)$ et $(Z\leq x)$ ssi :

* la première valeur de X qui dépasse a est X_n

$\Rightarrow$ $\underbrace{X_1\leq a,\ X_2\leq a,\ \dots,\ X_{n-1}\leq a}_{\text{Ceci équivaut à } \max(X_1,\dots,X_{n-1})\leq a.}$, $X_n>a$ sont réalisés.

* cette dernière valeur est $\leq x$: $X_n\leq x$.

d'où $\boxed{(N=n)\cap(Z\leq x)=(T_{n-1}\leq x)\cap(a<X_n\leq x).}$

Si $n=1$, les tirages $\leq a$ sont absents :

$$\boxed{(N=1)\cap(Z\leq x)=(a<X_1\leq x)}$$

Pour $n=1$ on a alors :

$$\begin{aligned}&P((N=1)\cap(Z\leq x))\\ =\ & P(a<X_1\leq x)\\ =\ & F_{X_1}(x)-F_{X_1}(a)\\ =\ & (1-e^{-x})-(1-e^{-a})\end{aligned}\qquad (a,x\geq 0 \text{ et } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1))$$

$$\boxed{P((N=1)\cap(Z\leq x))=e^{-a}-e^{-x}}$$

et $\forall n\geq 2$, $P((N=n)\cap(Z\leq x))=P((T_{n-1}\leq a)\cap(a<X_n\leq x))$

$X_1,\dots,X_{n-1},X_n$ sont indép ; donc par lemme des coalitions,

T_{n-1} et X_n sont indép.

D'où

$$P\big((N=n)\cap(Z\le x)\big) = P(T_{n-1}\le a)\times P(a<X_n\le x)$$
$$= (1-e^{-a})^{n-1} \times (e^{-a}-e^{-x})$$

avec la fct° rép de T_{n-1} vue en 4a.

12 b.

On applique les proba totales avec le SCE $((N=n))_{n\in\mathbb{N}^*}$

$$\forall x>a,\ P(Z\le x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\big((N=n)\cap(Z\le x)\big)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(1-e^{-a})^{n-1}(e^{-a}-e^{-x})$$

en constatant que la formule obtenue pour $n\geq 2$ est encore vraie pour $n=1$

$$P(Z\le x) = (e^{-a}-e^{-x})\sum_{n=1}^{+\infty}(1-e^{-a})^{n-1}$$
$$= (e^{-a}-e^{-x})\frac{1}{1-(1-e^{-a})}$$
$$= e^{a}(e^{-a}-e^{-x})$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x>a,\quad P(Z\le x) = 1-e^{-(x-a)}}$$

13a. On a trouvé :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 1 - e^{-(x-a)} & \text{si } x > a \end{cases} \leftarrow \text{car } Z(\Omega) =]a, +\infty[$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, : $P(Z-a \leq x) = P(Z \leq x+a)$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x+a \leq a \\ 1 - e^{-(x+a-a)} & \text{si } x+a > a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et on trouve bien $\boxed{Z-a \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$

13b. On en conclut :

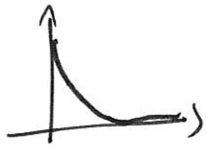
$E(Z-a) = 1 \Rightarrow \boxed{E(Z) = 1+a}$ par linéarité de l'espérance

$V(Z-a) = 1 \Rightarrow \boxed{V(Z) = 1}$

14. Z étant la première valeur de X qui dépasse a, il suffit de changer la dernière ligne de la fonction en : $\boxed{\texttt{return X}}$

D'après ce qu'on a vu, Z est toujours supérieure à a
(ici $a = 3$)

donc la figure 1 ne peut pas convenir

De plus, $Z - 3$ suit une loi exponentielle donc
l'allure de la densité est , donc la "cloche"

de la figure 2 ne peut pas convenir.

On obtient donc $\boxed{\text{la figure 3}}$

Exercice 2

1. $M(\omega)$ est symétrique, donc diagonalisable

$\det M(\omega) = X_1(\omega)^2 - X_2^2(\omega)$

Or ici X_1 et X_2 ne prennent que les valeurs 1 et -1 ;

donc on a toujours $X_1(\omega)^2 = X_2(\omega)^2 = 1$ et $\det(M(\omega)) = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{M(\omega) \text{ n'est pas inversible.}}$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$: $M(\omega) - \lambda I_2$ n'est pas inversible ssi

$$\det \begin{pmatrix} X_1 - \lambda & X_2 \\ X_2 & X_1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \iff (X_1 - \lambda)^2 - X_2^2 = 0$$

$$\iff (X_1 - \lambda)^2 = X_2^2$$

$$\iff X_1 - \lambda = X_2 \text{ ou } X_1 - \lambda = -X_2$$

$$\iff \lambda = X_1 - X_2 \text{ ou } \lambda = X_1 + X_2$$

d'où $\boxed{Sp(M(\omega)) = \{X_1(\omega) + X_2(\omega), X_1(\omega) - X_2(\omega)\}}$

3. On recherche les sous-espaces propres de $M(\omega)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & X_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (X_1 + X_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} X_1 x + X_2 y = (X_1 + X_2) x \\ X_2 x + X_1 y = (X_1 + X_2) y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X_2 y = X_2 x \\ X_2 y = X_2 x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x = y \quad \underline{\underline{\text{car } X_2 \neq 0}} \qquad (X_2 \text{ vaut } \pm 1)$

$$\Rightarrow \boxed{E_{X_1+X_2}(\Pi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)}$$

De m̃ on trouve $\boxed{E_{X_1-X_2}(\Pi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)}$

On a donc la matrice $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ (inversible car ses 2 colonnes ne sont pas colinéaires)

tq $\boxed{\forall \omega \in \Omega, \quad P^{-1}\Pi(\omega)P = \begin{pmatrix} X_1(\omega)+X_2(\omega) & 0 \\ 0 & X_1(\omega)-X_2(\omega)\end{pmatrix}}$

4)a. Y est solut° de (S) ssi $\begin{cases} y_1'(t) = X_1 y_1(t) + X_2 y_2(t) \\ y_2'(t) = X_2 y_1(t) + X_1 y_2(t)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & X_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t)\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Y' = \Pi(\omega)\, Y}$$

4b. i) D'après le cours, les solut° de (S) sont les fonct° de la forme

$$t \mapsto K_1 e^{(X_1+X_2)t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + K_2 e^{(X_1-X_2)t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \qquad \text{où } K_1, K_2 \text{ réels}$$

d'où $\boxed{Y(t) = \begin{pmatrix} K_1 e^{(X_1+X_2)t} + K_2 e^{(X_1-X_2)t} \\ K_1 e^{(X_1+X_2)t} - K_2 e^{(X_1-X_2)t}\end{pmatrix}}$

4b (ii)

(S) admet des points d'équilibres non nuls ssi $\mathrm{Ker}\, \Pi(\omega) \neq \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$

(car $\mathrm{Ker}(\Pi(\omega))$ est l'ensemble des points d'équilibre !)

Ceci équivaut à dire que Π n'est pas inversible ... ce qui est toujours le cas d'après la première question.

$\boxed{\text{La proba demandée vaut donc } 1}$

4b (iii) Tts les solut° du système sont convergentes ssi $\underline{Sp(\Pi) \subset \mathbb{R}_-}$

Or $Sp(\Pi) = \{X_1 + X_2 \,,\, X_1 - X_2\}$

On demande donc que $X_1 + X_2 \leq 0$
$X_1 - X_2 \leq 0$

et comme X_1 et X_2 valent ± 1 on voit que parmi les 4 configurat° possibles, $(X_1 = -1) \cap (X_2 = 1)$ et $(X_1 = -1) \cap (X_2 = -1)$ sont les seuls qui donnent le bon résultat.

$\Rightarrow$ La proba recherchée est (par incompatibilité)

$$p = P\big((X_1 = -1) \cap (X_2 = 1)\big) + P\big((X_1 = -1) \cap (X_2 = -1)\big)$$

indép de X_1 et X_2

$$= P(X_1 = -1) P(X_2 = 1) + P(X_1 = -1) P(X_2 = -1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Exercice 3 : une marche au hasard

1a. Par définit° : $\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,n]\!])}$

(donc : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X_n=k) = \frac{1}{n+1}$)

1b. Une telle variable admet 1 espérance et 1 variance d'après le cours ; on a

$$\boxed{E(X_n) = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad V(X_n) = \frac{(n+1)^2-1}{12}}$$

2a. Y étant le temps du premier retour à l'origine :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (Y=n) = (X_1 \neq 0) \cap (X_2 \neq 0) \cap \dots \cap (X_{n-1} \neq 0) \cap (X_n = 0)$$

$$\boxed{(Y=n) = \bigcap_{k=1}^{n-1} (X_k \neq 0) \cap (X_n = 0)}$$

(pour $n \geqslant 2$; pour $n=1$ $\underline{(Y=1) = (X_1 = 0)}$

2b. les X_i étant indépendants on a :

$$\forall n \geqslant 2, \quad P(Y=n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(X_k \neq 0)\right) \times P(X_n = 0)$$

or : $P(X_n=0) = \frac{1}{n+1}$; et $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$

$$P(X_k \neq 0) = 1 - P(X_k = 0) = 1 - \frac{1}{k+1} = \underline{\underline{\frac{k}{k+1}}}$$

d'où

$$\forall n \geq 2 \quad P(Y=n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1}\right) \times \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{3} \times \cdots \times \frac{n-2}{\cancel{n-1}} \times \frac{\cancel{n-1}}{n} \times \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{P(Y=n) = \frac{1}{n(n+1)}}$$ (produit télescopique)

et pour $n=1$ $\quad P(Y=1) = P(X_1=0) = \frac{1}{2}$ et on retrouve la même formule

2c. Classiquement $\quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

d'où, pour $N \geq 1$ fixé

$$\sum_{n=1}^{N} P(Y=n) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1$$ par télescop.

On a bien $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n) = 1}$

Ceci signifie que le mobile revient à l'origine à un moment donné avec proba 1.

2d. $n\,P(Y=n) = \frac{1}{n+1}$, et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n+1}$ diverge (série de Riemann)

$\Rightarrow$ $\boxed{Y \text{ n'admet pas d'espérance}}$

3a. Si $k \leq t \leq k+1$ on a $\boxed{\dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k}}$

par décroissance de la fct° inverse sur $\mathbb{R}_+^*$

3b. On intègre cette inégalité sur $[k, k+1]$:

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dt$$

⚠⚠

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{k+1} \leq \Big[\ln|t|\Big]_k^{k+1} \leq \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{k+1} \underset{(**)}{\leq} \ln(k+1) - \ln(k) \underset{(*)}{\leq} \frac{1}{k}}$$

On somme alors l'inégalité (*) pour $k \in [\![1, j]\!]$ ($\subset \mathbb{N}^*$ donc l'inégalité est bien valable)

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{j-1} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big)$$

et on voit un joli télescopage :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \geq \ln(j) - \ln(1) = \ln(j)}$$

3c. On somme cette fois ⊛⊛ de $k=1$ à $j-1$

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{j-1} \ln(k+1) - \ln(k)$$

$\Rightarrow$ chg^t d'indice $k+1 \to k$

$$\boxed{\sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k} \leq \ln(j)}$$

En compilant ces deux inégalités :

$$* \quad \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} = \left(\sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k}\right) + \underbrace{1}_{\text{terme } k=1} - \underbrace{\frac{1}{j}}_{\text{terme } k=j} \leq \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}$$

$$* \quad \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \geq \ln(j) \quad \text{vu en 3b}$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall j \geq 2, \quad \ln(j) \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}}$$

3d. Notons $S_j = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}$: on a $\ln(j) \leq S_j \leq \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}$

d'où en divisant par $\ln(j) > 0$ (pour $j \geq 2$) :

$$1 \leq \frac{S_j}{\ln(j)} \leq \underbrace{1 + \frac{1}{\ln(j)} - \frac{1}{j\ln(j)}}_{\xrightarrow{j \to +\infty} 1}$$

On trouve bien $\dfrac{S_j}{\ln(j)} \longrightarrow 1$ d'où $\boxed{S_j \underset{j\to+\infty}{\sim} \ln(j)}$

4a. Si $i \geqslant j$, le 1er retour a lieu après le second : c'est impossible !

$$\Rightarrow \boxed{\forall i \geqslant j, \quad P_{(Y=i)}(Z=j) = 0}$$

4b Si $i \leqslant j-1$, on a le 2nd retour en j ssi :
$(\Leftrightarrow i+1 \leqslant j)$

$$X_{i+1} \neq 0, \ X_{i+2} \neq 0, \dots, X_{j-1} \neq 0, \ X_j = 0.$$

d'où $P_{(Y=i)}(Z=j) = P\left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1} (X_k \neq 0) \cap (X_j = 0)\right)$

et comme en 2b avec l'indépendance des $X_{i+1}, \dots, X_j$:

$$P_{(Y=i)}(Z=j) = \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} \frac{k}{k+1}\right) \times \frac{1}{j+1}$$

$$= \frac{i+1}{j} \times \frac{1}{j+1} = \boxed{\frac{i+1}{j(j+1)}}$$

4c. Avec la formule des probas totales associée au SCE $((Y=i))_{i\in\mathbb{N}^*}$
(NB : c'en est un d'après 2c ; a priori ce n'était pas trivial)

$$P(Z=j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y=i) \underbrace{P_{(Y=i)}(Z=j)}_{\text{nulle pour } i \geq j}$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1} P(Y=i) \times \frac{i+1}{j(j+1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i(i+1)} \frac{i+1}{j(j+1)}$$

$$\boxed{\Rightarrow P(Z=j) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i\,j(j+1)} = \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i}}$$

4d. Avec l'équivalent de 3d :

$$P(Z=j) \underset{j \to +\infty}{\sim} \frac{1}{j^2} \times \ln(j)$$

d'où $j\,P(Z=j) \underset{j \to +\infty}{\sim} \frac{\ln(j)}{j}$

Or pour $j \geq 3$ $\quad \frac{\ln(j)}{j} \geq \frac{1}{j} \geq 0 \quad$ et $\sum \frac{1}{j}$ diverge.

Par comparaison $\sum \frac{\ln(j)}{j}$ diverge

d'encore " , $\sum j\,P(Z=j)$ diverge

$\Rightarrow$ $\boxed{Z \text{ n'admet pas d'espérance}}$